はしがき

超函数の理論を創めた Laurent Schwartz は，この理論を確立した功績により，1950 年の国際数学者会議において Fields Prize を授けられた．かれはこの理論を，数学専攻者のみならず物理学者や工学者にも伝える目的で，Théorie des distributions, I et II (1950) を Paris の Hermann 社から出版している．これには岩村聯氏の邦訳（岩波）も出版されて，理論の意義および現状を知るための唯一の書物となっている．しかしこの書物は，線形位相空間に関する一般知識の説明や証明を省いたところがあるために，数学専攻者にも幾分近づきがたい感じを与えるようである．

本講座では，一般の線形位相空間を表面に出さずに，距離空間や Hilbert 空間の初歩の予備知識があれば十分読み得るように述べたつもりである．

1956年10月

吉田耕作

今回の再版に際して，誤植などの訂正に山中健氏の多大な御援助を頂いたことをしるして，山中氏に厚く感謝の意を表明したい．

1967年6月

吉田耕作

第1章　序　　論

超函数 (distribution) は "部分積分の概念を通しての函数概念の拡張" として L. Schwartz によって創められた (1945 年) ものである．超函数は "無限回微分可能な函数の系列のある意味の極限" と考えられるのであるが，部分積分およびそれから導かれる Gauss–Green–Stokes 等の積分公式を通して解析学の根本に触れているために，とくに偏微分方程式やフーリエ解析の統一的かつ一般的な取扱いに有効なことが示され，ひいては調和積分論等を通じてトポロジーの解析的研究にも偉力を発揮しつつあるのである．

本書は超函数論への入門として，できるだけ少ない予備知識のもとにその一般論を紹介したい．Lebesgue 式積分論は既知とするが，完備な距離空間に関する Baire–Hausdorff の定理や，Hilbert 空間に関する一般概念等の予備知識については附録に簡単に解説して読者の便宜をはかっておいた．

1.1　超函数の定義および例

函数空間 ($\mathfrak{D}_{R^n}$)　n 次元ユークリッド空間 R^n の点を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表わし，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ および実数 α に対して

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

等と書く．R^n で定義せられた複素数値の無限回偏微分可能な函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，R^n の部分集合

$$K=\{x\,;\,\varphi(x)\neq 0\}^{1)}$$

にその集積点をつけ加えたもの，すなわち K の**閉苞** (closure) を $\varphi(x)$ の**台**または**担い手** (carrier, support) といい，これを car.(φ) で表わす．その台がコンパクトな集合 (R^n で考えているから有界閉集合ということと同義) であるような $\varphi(x)$ の全体を ($\mathfrak{D}_{R^n}$) と書くことにすれば，($\mathfrak{D}_{R^n}$) は算法

1)　$\{x; \cdots\}$ は条件…を満足する x の全体のつくる集合を示す．

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$
$$(\alpha\varphi)(x)=\alpha\varphi(x) \qquad (\alpha \text{ は複素数})$$

で複素数を係数とする**ベクトル空間** (linear space) をつくる．$\cup$をもって**和集合**を表わすとき

$$\mathrm{car.}(\varphi+\psi)\subseteqq\mathrm{car.}(\varphi)\cup\mathrm{car.}(\psi)$$
$$\mathrm{car.}(\alpha\varphi)\subseteqq\mathrm{car.}(\varphi)$$

であるからである．

恒等的に0となる函数（これを0で表わす）以外に（$\mathfrak{D}_{R^n}$）に属する函数は確かに存在する．例えば $\varepsilon>0$ とし，$|x|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$ とおくとき，

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqq\varepsilon \text{ のとき}\\ \exp(1/(|x|^2-\varepsilon^2)), & |x|<\varepsilon \text{ のとき}\end{cases} \tag{1·1}$$

がその例である．car.(φ_ε) は原点を中心とし半径 ε の閉じた球 $|x|\leqq\varepsilon$ であり，$\varphi_\varepsilon(x)$ が $|x|=\varepsilon$ においても無限回偏微分可能なことは容易にわかる．$|x|\to\varepsilon$ なるとき $\exp(1/(|x|^2-\varepsilon^2))$ は $(|x|-\varepsilon)$ のいかなるべきよりも高い order で0に収束するからである．

函数空間 $(\mathfrak{D}_K)$ K を R^n のコンパクトな集合とし，car.$(\varphi)\subseteqq K$ であるような $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ の全体を $(\mathfrak{D}_K)$ と書くことにすれば，(1·1) から明らかに $(\mathfrak{D}_K)$ は複素数を係数とするベクトル空間をつくる．すなわち K の外では恒等的に0となるような無限回偏微分可能な函数 $\varphi(x)$ の全体 $(\mathfrak{D}_K)$ は $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の部分ベクトル空間をつくる．$(\mathfrak{D}_K)$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ の恒等的に0なる函数への収束を

$$\left.\begin{array}{l}h\to\infty \text{ なるとき，}\varphi_h(x) \text{ およびその偏導函数 } \partial\varphi_h/\partial x_j,\\ \partial^2\varphi_h/\partial x_j\partial x_k,\cdots \text{ の各々が0に一様収束する}\end{array}\right\} \tag{1·2}$$

によって定義し

$$\varphi_h\Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_K)) \text{ または } \lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{D}_K))$$

で表わす．

$(\mathfrak{D}_{R^n})$ **における収束** $\varphi_h\Longrightarrow 0$ $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ の恒等的に0なる函数0への収束を

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるコンパクトな集合 } K\subseteqq R^n \text{ に対して,}\\ \varphi_h\in(\mathfrak{D}_K)\ (h=1,2,\cdots) \text{ かつ } \varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_K))\end{array}\right\}\quad(1\cdot3)$$

の成り立つことによって定義して

$$\varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))\ \text{または}\ \lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$$

あるいは $(\mathfrak{D}_{R^n})$ を略して　　$\varphi_h\Longrightarrow 0$

と書く．すなわち $\varphi_h\Longrightarrow 0$ は

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるコンパクトな集合 } K\subseteqq R^n \text{ に対して car.}(\varphi_h)\subseteqq K\\ (h=1,2,\cdots),\ \text{かつ } \varphi_h(x) \text{ および その偏導函数 } \partial\varphi_h/\partial x_j,\\ \partial^2\varphi_h/\partial x_j\partial x_k,\cdots \text{ の各々が 0 に一様収束する}\end{array}\right\}\quad(1\cdot4)$$

ことである．

超函数の定義　$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の各 $\varphi(x)$ に対して複素数を対応させる $T(\varphi)$ が次の二条件

$$\left.\begin{array}{ll}T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1T(\varphi_1)+\alpha_2T(\varphi_2) & \text{(加法性)}\\ \lim\limits_{\varphi_h\Longrightarrow 0}T(\varphi_h)=0 & \text{(連続性)}\end{array}\right\}\quad(1\cdot5)$$

を満足するときに，この対応 T を（$(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた）**超函数**とよぶ．函数解析の言葉でいえば，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた“連続な加法的汎函数” T を超函数とよぶのであって，この**汎函数** (functional) T の**試料函数** (testing function) $\varphi(x)$ においてとる値が $T(\varphi)$ であるわけである．

超函数の例　**例 1**　$f(x)$ を R^n で定義せられた複素数値の可測函数で**局所可積分** (locally integrable) とする．すなわち $f(x)$ は任意のコンパクト集合 $\subseteqq R^n$ の上で Lebesgue 式積分可能とする．そうすれば，任意の $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して car.(φ) はコンパクトであるから

$$T_f(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx_1\cdots dx_n\qquad(1\cdot6)$$

が定義される．この T_f が超函数の条件を満足することは容易にわかる．

例 2　$\mu(E)$ を R^n の Borel 集合に対して σ-加法的[1]（で有界閉集合 E に対しては

1) $\{E_h\}$ を互に共通点のない Borel 集合列とするとき

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{\infty}E_h\right)=\sum_{h=1}^{\infty}\mu(E_h)$$

有限値をとる）複素数値の**測度**（measure）とするときの Lebesgue–Stieltjes 積分

$$T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mu(dx) \tag{1·7}$$

が超函数の条件（1·5）を満足することも見易い．

例 3 偏微分作用素

$$D^{(p)}=\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}/\partial x_1{}^{p_1}\partial x_2{}^{p_2}\cdots\partial x_n{}^{p_n} \tag{1·8}$$

を導入する．各 $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$(D^{(p)}\varphi)(0)=(\partial^{p_1+\cdots+p_n}\varphi/\partial x_1{}^{p_1}\cdots\partial x_n{}^{p_n})(0,\cdots,0) \tag{1·9}$$

を対応させると，$T(\varphi)=(D^{(p)}\varphi)(0)$ によって超函数 T が定義されることは明らかである．

例 4 $p_1=p_2=\cdots=p_n=0$ なる特別の場合，すなわち各 $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に $\varphi(0)$ を対応させる超函数を T_δ と書いて：

$$T_\delta(\varphi)=\varphi(0) \tag{1·10}$$

T_δ を **Dirac 超函数**という．

Dirac の δ 函数 物理学者 Dirac は量子力学に登場してくる対称作用素のスペクトル分解を形式的直観的に表わすために，いわゆる δ 函数を導入した．これは一次元の場合には，

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 0 \text{ ならば } \delta(x)=0,\ \delta(0)=\infty \text{ にして } \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \\ \text{かつ“任意の函数”} \varphi(x) \text{ に対して } \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0) \end{array}\right\} \tag{1·11}$$

が成り立つものとして定義される．このような函数は“数学的に許されない”ので物理学者もこれを**擬函数**（pseudo–function）とよんでいる．Dirac はさらに部分積分で（1·11）よりも一般な公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(p)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^p\varphi^{(p)}(0) \tag{1·12}$$

も成り立つとした．次の§に示すように，超函数的に考えればこの奇妙な公式もすなおな解釈をもつのである．

1·2 超函数の偏微分

超函数の偏微分 1·1 の例1において $f(x)$ を一回連続偏微分可能とする

と，部分積分で

$$T_{\partial f/\partial x_i}(\varphi)=T_f(-\partial\varphi/\partial x_i) \tag{1·13}$$

を得る．$\varphi(x)$ の台がコンパクトであることを使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi(x)dx_i=[f(x)\varphi(x)]_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i$$

となるからである．(1·13) に示唆されて，任意の超函数 T の偏微分超函数 $\partial T/\partial x_i$ を次のようにして定義する．すなわち $T(-\partial\varphi/\partial x_i)$ を $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の汎函数と考えると (1·5) を満足するから，これをある超函数 S の試料函数 φ における値と考えてよい．この超函数 S をもって $\partial T/\partial x_i$ と定義するのである．

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi)=T\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=(-1)\,T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \tag{1·14}$$

よって任意の超函数は無限回偏微分可能で偏微分した結果はまた超函数になる．そして (1·14) を繰返して

$$\left.\begin{array}{l} D^{(p)}=\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}/\partial x_1{}^{p_1}\partial x_2{}^{p_2}\cdots\partial x_n{}^{p_n}\ \text{に対して} \\ (D^{(p)}T)(\varphi)=(-1)^{|p|}T(D^{(p)}\varphi) \\ \quad\text{ただし}\ |p|=p_1+p_2+\cdots+p_n \end{array}\right\} \tag{1·15}$$

を得る．

したがって，$n=1$ なるとき

$$\left(\frac{d^p}{dx^p}T_\delta\right)(\varphi)=(-1)^pT_\delta\left(\frac{d^p\varphi}{dx^p}\right)=(-1)^p\varphi^{(p)}(0)$$

が成り立ち，(1·12) が超函数論的には (1·15) の特別な場合に他ならないことがわかる．

Poisson の公式　これは

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x^2{}_i\quad(\text{ラプラシアン})$$

$$r=r(y,x)=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}$$

とするときの公式

$$\left.\begin{array}{ll}\displaystyle\int_{R^n} r(y,x)^{2-n}\Delta\varphi(x)\,dx=(2-n)\Omega_{n-1}(y),\varphi & n\geqq 3\\ \text{(ただし } \Omega_{n-1} \text{ は原点を中心とし半径1の球の表面積} & \\ 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(n/2) \text{ を表わす).} & \\ \displaystyle\int_{R^2}\log r(y,x)\Delta\varphi(x)\,dx=2\pi\varphi(y), & n=2\end{array}\right\}\quad(1\cdot16)$$

であって，ポテンシャル論の基本定理である．この公式は超函数論的には，

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta T_{r(y,x)^{2-n}}=(2-n)\Omega_{n-1}\cdot T_{\delta_y}, & n\geqq 3\\ \Delta T_{\log r(y,x)}=2\pi T_{\delta_y}, & n=2\end{array}\right\}\quad(1\cdot17)$$

のごとく覚え易い形に書かれる．ただし

$$T_{\delta_y}(\varphi)=\varphi(y)\qquad(1\cdot18)$$

である．

((1·17) の証明)　G を R^n の有界領域でその境界 ∂G はいくつかの滑かな超曲面から成るものとする．このとき $u(x),v(x)$ が閉領域 $G\cup\partial G$ において一回連続偏微分可能とすると，**Green の積分公式**

$$\int_G u\cdot\Delta v\,dx-\int_G v\cdot\Delta u\,dx=\int_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)dS\qquad(1\cdot19)$$

が成り立つ．ここに ν は外向き法線，dS は ∂G 上の超曲面要素である．

このよく知られた公式を利用して (1·17) を出す．すなわち次のとおり．

点 y を中心とし半径 $\varepsilon>0$ の球の外側に (1·19) を応用して

$$\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon} r^{2-n}(y,x)\Delta\varphi(x)\,dx=\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon}\varphi(x)\Delta r^{2-n}(y,x)\,dx$$

$$+\int_{r(y,x)=\varepsilon}\varepsilon^{2-n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}$$

$$-\int_{r(y,x)=\varepsilon}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\nu}r(y,x)^{2-n}\cdot\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}$$

を得る．$\varphi(x)$ の台がコンパクトであるから $\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon}(\quad)\,dx$ と書いても実は有界領域での積分であり，また点 y を中心とする極座標においては

$$dx=dx_1\cdots dx_n=r^{n-1}\cdot dr\cdot d\Omega_{n-1}\qquad(1\cdot20)$$

したがって，境界 $r(y,x)=\varepsilon$ の上では $dS=\varepsilon^{n-1}\cdot d\Omega_{n-1}$ となるからである．

よく知られているように

$$x\neq y \text{ ならば } \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}r^{2-n}(y,x)=0$$

が成り立つから[1] 右辺第一項$=0$．また左辺は (1·20) によって

$$\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon} r^1\cdot\Delta\varphi(x)\,dr\,d\Omega_{n-1}$$

となるから $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき収束してその極限は

$$\int_{R^n} r^{2-n}(y,x)\,\Delta\varphi(x)\,dx=T_{r^{2-n}(y,x)}(\varphi)$$

に等しい．同じく右辺第二項は $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき 0 に収束する．また境界 $r(y,x)=\varepsilon$ の上で

$$\frac{\partial}{\partial\nu}r^{2-n}(y,x)=-\frac{\partial}{\partial r}r^{2-n}(y,x)=(n-2)\varepsilon^{1-n}$$

となるから，右辺第三項は $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき

$$(2-n)\varphi(0)\Omega_{n-1}$$

に等しい．

かくして $n\geqq 3$ なるときの (1·17) が証明された．$n=2$ なるときも同様にして証明される．

1.3 超函数の算法

超函数 T,S の和は

$$(T+S)(\varphi)=T(\varphi)+S(\varphi) \tag{1·21}$$

によって定義され，また超函数の定数倍は

$$(\alpha T)(\varphi)=\alpha T(\varphi) \tag{1·22}$$

によって定義される．明らかに

$$T_f+T_g=T_{f+g} \tag{1·21$'$}$$

---

1) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}r^{\alpha}(y,x)=\alpha r^{\alpha-1}\cdot r^{-1}\cdot(x_i-y_i)$,

$\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}r^{\alpha}=\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}\cdot r^{-2}\cdot(x_i-y_i)^2+\alpha r^{\alpha-1}\cdot(r^{-1}-r^{-3}\cdot(x_i-y_i)^2)$,

故に $\Delta r^{\alpha}=\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+\alpha(n-1)r^{\alpha-2}=\alpha(\alpha+n-2)r^{\alpha-2}$.

$$\alpha T_f = T_{\alpha f} \tag{1·22$'$}$$

であるから，上の (1·21)，(1·22) は函数の和，函数の定数倍の概念の拡張になっている．

超函数の積は一般に定義できない．しかし $f(x)$ を無限回偏微分可能な函数とすれば，超函数 T_f と任意の超函数 T との積 $T_f T$ は

$$(T_f T)(\varphi) = T(f\varphi) \tag{1·23}$$

によって定義される．car.$(f\varphi) \subseteqq$ car.(φ) であり，かつ f, φ とともに，$f(x)\varphi(x)$ も無限回偏微分可能であるから $f\varphi \epsilon (\mathfrak{D}_{R^n})$．よって $T(f\varphi)$ が定義されるが $T(f\varphi)$ を φ の汎函数 $S(\varphi)$ と考えれば S が超函数の条件 (1·5) を満足することは見易い．この超函数 S を $T_f T$, TT_f 等と書いて

$$T_f T = TT_f \tag{1·24}$$

これを T_f と T との**積** (product) とよぶ．

超函数の直積および畳み込み その点を一般に x で表わす R^n の他に，その点を一般に $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ で表わす R^m も考える．$(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属する函数 $\varphi(x)$ と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ に属する函数 $\psi(y)$ との積 $\varphi_i(x)\cdot\psi_i(y)$ の一次結合

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x) \psi_i(y)$$

の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ との**直積** (direct product) と名づけて $(\mathfrak{D}_{R^n}) \times (\mathfrak{D}_{R^m})$ と書く．この直積の概念を拡張して "$(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた超函数と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ で定義せられた超函数との直積" を定義することができる(第4章)．またこの直積の概念を利用して二つの函数 $\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ の**畳み込み** (convolution) または合成積

$$\varphi * \psi(x) = \int_{R^n} \varphi(x-z)\psi(z)\,dz \;\epsilon\; (\mathfrak{D}_{R^n})$$

の概念を超函数の場合に拡張することができる(第5章)．これは超函数の構造を研究する上に，また超函数の Fourier 解析の研究に重要な役割をつとめる．

以上の算法の他に超函数の偏微分算法も (1·15) によって定義せられ，普通の偏微分算法の拡張になっているのみならず，任意の超函数は無限回偏微分可

能なことが示された．以上の諸算法を組合せることによって超函数の解析学が普通の解析学の拡張として建設せられるのであるが，とくに超函数の偏微分法の導入が解析学の根本である部分積分を通してなされているために，偏微分方程式論等の統一的取扱いに非常な効果を発揮するのである．