はしがき

最適化の新しい理論である「離散凸解析」をできるだけ平易に紹介したい．まず最初に，漢字の読み方は「りさん とつ かいせき」である．英語では discrete convex analysis という．

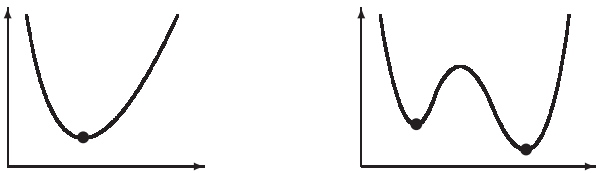
「最適化」というのは，数学でいう最大・最小問題のことであるが，例えば，新幹線車両の強度を保った上で重量を最小にせよ，というような実際問題を意識しているときに，最適化という言葉を使うことが多い．車両や建物のような「物」の最適設計の他にも，金融資産の最適運用，渋滞時の最適経路選択，コンビニの最適在庫管理等々，最適化は「情報」の利用技術として，日常生活に浸透している．現代は最適化の時代である．

「離散」も現代を象徴するキーワードである．離散というのは連続の反対を意味し，バラバラ，ポツポツの状態を表す．実数全体は連続，整数全体は離散である．

連続＝アナログ，　　離散＝デジタル

である．ネットワーク構造が離散構造の典型であり，インターネットは地球のもつ地理的・幾何的連続性と無関係に構築された大規模な離散構造である．

「凸（とつ）」というのは「でっぱっている」という意味であり，本書で扱うのは凸関数 (convex function) という数学的な概念である．例えば，



の左側の関数は凸関数であり，右側の関数は凸でない関数である．凸関数はグラフが下向きに「でっぱっている」関数である．

凸関数では，極小点と最小点が一致する．例えば，右側の凸でない関数は二つの極小点をもつが，そのうちの一つは最小点でない．これに対し，左側の凸関数では「極小＝最小」が成り立っている．したがって，最小化の最適化問題では，凸関数は扱いやすく，凸でない関数は難しい．易しい問題と難しい問題の境目は，線形か非線形かにあるのではなくて，凸か非凸かにある．これが最適化の分野の常識である．

上に挙げた「最適化」,「離散」,「凸」の三つが，離散凸解析のキーワードである．離散凸解析では，L 凸関数と M 凸関数という二つの新しい概念を導入して「凸関数と類似した離散構造」を研究する．ここで，L は束 (lattice)，M はマトロイド (matroid) という離散数学における専門用語に由来するが，離散構造の種類を示す符丁と思っておけばよい．「凸関数と類似した離散構造」という見方は，すでに 1980 年代前半に現れており，これが 1990 年代後半に発展して離散凸解析の理論が確立された．

離散凸解析には，「凸関数と類似した離散構造」（連続→離散）とは逆方向の「離散構造を兼ね備えた凸関数」（離散→連続）という問題意識もあり，連続変数の凸関数に対して付加的な離散構造を考察する．このように，離散凸解析における離散と連続の関係は双方向である．

本書の狙いは離散凸解析の考え方をできるだけ平易に紹介することであるから，大局観に立って，数学としての厳密性よりも数理科学としての大らかさを大切にした．要するに，話の流れを重視し，数学的に細かな条件や証明は省略したということである．本書で大筋を理解し，詳細に興味をもった読者は，拙著 [2, 3] を参照して頂きたい．

本書を執筆するにあたって，多くの方々の協力を得た．杉原正顯氏，田村明久氏，駒木文保氏，大石泰章氏，塩浦昭義氏，森口聡子氏，齊藤廣大氏には原稿へのコメントを頂いた．土村展之氏，田中健一郎氏，平井広志氏，小市俊悟氏には図面の作成に協力して頂いた．また，共立出版㈱の小山透氏と赤城圭氏にはいろいろとお世話になった．この場を借りて，皆様に感謝の意を表したい．

2007 年 9 月

室田 一雄