

# 序 文

高校生の頃、エリック・テンプル・ベル (Eric Temple Bell) の『数学の偉人たち (*Men of Mathematics*)』を読んだ私は、それ以来數学者たちの生涯や数学の歴史のとりこになってしまった。いろいろなアイデアが発展して現代数学の多くの定義や定理へとつながっていく様子を理解することは、それらの重要性を浮き彫りにするばかりでなく、数学理論の目標や未解決問題へのより深い視点を与えてくれるのである。

なかでも数論は、ガウスが「数学の女王」と名づけたものだが、とりわけ歴史的に理解することが重要な分野である。1986年の秋から、私は数論と数学史への興味を組み合わせて、数学史的視点から見た数論の1年コースの授業を行ってきた。そのコースでは、歴史的に重要なポイントを示すことでさまざまな話題の発展を明らかにするとともに、有名な数論学者たちの生涯に関する議論も交えている。このコースの講義ノートを、もっと正式な形のノートに手直しして生まれたのが本書である。ただし本書の精神も、題材の構成も、もとの講義そのままである。

本書は自己完結的にはなっていない。あえて証明なしに定理を述べているところがある。しかしこのことによって、専門家しか必要としない細かい議論を避けながら、広い視点を与え、重要な概念を導入することができる。また時には、議論が新しいアイデアを必要とするため、証明なしの結果を他の定理の証明に用いることもある。

本書の第1部（第1章～第6章）は、フェルマー、オイラー、ラグランジュ、そしてルジャンドルの業績にあてられている。これらの數学者は、ガウスと合わせて、現代数論を作り上げた主人公であり、現在関心をもたれているほとんどすべての理論（2次形式、相互法則、素数の分布、有限体上の方程式、代数

的整数論, 曲線上の有理点, など) が, これらの数学者たちのアイデアに由来をたずねることができる. ここでは彼らの発見の多くについて例とともに説明し, 体系的な展開はあと回しにしてある. ただ, 連分数の理論についてだけはやや深く議論した. これは古代ギリシャに起源をもつ理論で, たいていの数学者には知られていないものでありながら, アルゴリズム的手法への現代的関心に大変よく合った理論である.

次はガウスと彼の著作『整数論 (*Disquisitiones Arithmeticae*)』である. これは間違いなく, かつて書かれた最も重要な数学の書物のひとつである. 1801年に出版された『整数論』は, 厳密な現代的スタイルで数論を提示した初めてのものである. ガウスは合同の概念を導入して整数の可約性を扱ったが, より大切なのは, 合同の記号を導入したことである. ガウスはすでに知っていた成果を研究し直して, 平方剰余の相互法則の最初の証明を見出すといった古い問題を解決とともに, 2次形式に対する種や合成といった新しい概念を加えた. さらに彼は, 定規とコンパスによる正多角形の作図可能条件を見つけるという大昔からの問題をも解決し, 円分論という数論の新しい分野を開いた.

本書の第2部では, 数論の基本的要素への体系的入門を与える. ガウスの『整数論』における構成に従うが, その詳細をすべて追うわけではない. ガウスの仕事を概観し, 彼の人生について解説した(第7章)あと, 『整数論』の第1章を紹介し, 合同の概念を, 基本的な性質といくつかの応用とともに導入する(第8章). ガウスはこの章を大変明快に, 現代的なスタイルで書いたため, この話題に関するほとんどの初步的な書物の最初の章を, これで置き換えることができるほどである. それから群と環という統一的な代数的概念を利用して, その構想を現代的文脈に位置付ける. 結局合同の理論は, これらの代数的概念を導入するための本来の動機のひとつだったのである. 次に平方剰余の相互法則の2つの証明を含めた合同理論の更なる発展について(第9~11章), また2元2次形式の算術理論への入門(第12章), 形式の幾何学的理論(第13章, 部分的にはガウスより後の理論も含む)について述べる. 最後に平方剰余の相互法則の第3の証明と第4の証明のアウトラインを含め, 円分論への導入を与える(第14章).

これら14の章は, 初歩的な数論への, やや教養的な, 歴史を重視した入門となっている.

数論の創始者たち（フェルマー、オイラー、ラグランジュ、ルジャンドル、ガウス）は、数論学者であつただけでなく、その時代の数学全般にわたって貢献した。しかしガウス以降、大量の数学的知識が速いペースで生み出され、今日我々が見る専門分化ほどではないものの、ほんのいくつかの分野に、より多くの数学者が集中するようになってきた。数論は大変巨大になり、1冊の本では数論のすべての面について基本的な導入を示すことすらできなくなってしまった。そこで、本書の最後の部については、いくつかのテーマを選択した。一般的な代数的整数論の原型としての2次の代数的整数論（第15～17章）、曲線の算術（第18～20章）、数の幾何学（第22章）、 $p$ 進数と付値（第23章）、そして無理数および超越数とディオファンツ近似の相互に関連した話題（第21章）である。これらのテーマは互いにかなり独立しているので、どういう順番で読んでもよい。独立性を増すために、定義を繰り返しているところもある。しかしながら、これらの話題はすべて第1～14章を理解していることを仮定している。

第21章は私のお気に入りの章で、私が本書で成し遂げたかったことのよい例となっている。この話題の歴史は複雑なものではなく、そこに織り込まれた数学は、簡単に入り込めて、しかも重要な結果や未解決問題を見わたすことができる。この主題は数学のうちでも最もも難しいもののひとつで、少数の大変深い結果と、難しいがあまり抽象的ではない証明（それらの多くは微積分を知っているだけで理解できる）がある。また、容易に述べることができる未解決問題もたくさんある。たとえば、 $e + \pi$ と $e\pi$ の少なくともひとつが無理数でなければならぬことは示されている。どちらも無理数であることが証明できればすばらしいし、当然誰もがそう信じているのだが、その証明はいまだ存在しない。

私のもともとのコースは、専門的なコースというよりは、数論への幅広い手引きを求める大学院生や進んだ学部生のために計画されたものであった。私はまた、背景や例、そして抽象的な発展のための動機付けを与えることによって、数論や代数幾何学をより進んで研究しようと思う学生の興味をも引こうと努めた。これが本書を書くに当たって私が思い描いた読者像である。私は本書が、現代の数論の刺激的な進歩に魅了された数学者やアマチュア数学家にとつても興味を引くものであると期待する。

本書をほぼ完全に理解するためにあらかじめ必要なものは、学部コースの抽象代数（群、環、イデアル、体、ベクトル空間の基本的知識）、1変数および多変数の微積分、そして少し高度な微積分である。第19.7および19.8節では複素解析学のいくつかの知識が役に立つが、それがなくても基本的なアイデアは理解できる。抽象代数を学んだことがなくて、あらかじめ必要な「ある程度の数学的素養」が怪しい人でも、第1~15、18、21、22章と第23章の一部は「賢明な飛ばし読み」によって読める。私はまた、本書の最初の12個の章に対する姉妹編として、ハロルド・ダヴェンポート (Harold Davenport) の『*The Higher Arithmetic*』をお勧めする。これは高価でない宝物で、数論に興味のあるすべての人の本棚に置くべき本である。

数論は発展の黄金期にある。私は本書が数論の多くの成果の風味を、少しでも伝えていることを期待する。

ジェイ R. ゴールドマン (Jay R. Goldman)  
ミネアポリスにて

## 個人的謝意

本書を書くことはビッグ・プロジェクトであり、感謝すべき多くの方々がいる。

James Vaughn にどう感謝すべきであろうか？ 彼の励ましと Vaughn 財団の基金がなければ、本書を書こうとは思いもしなかったであろうし、このプロジェクトを始める時間もなかったことであろう。

出版元である Klaus Peters は、私が実現しようとしてきた、歴史的な観点から数学を説明しようというやり方に、深い信頼を寄せててくれている。いくつかの章の最初の版を見たとき、彼は直ちに契約を申し出てくれた。何年にもわたる執筆期間中、Klaus は私の遅れを我慢してくれ、私には価値あるゴールがあるとつねに主張して、私を机に縛り続けた。出版社のすべての人々が、可能な限りの方法で私を助けてくれた。

Barry Cipra と故 Garrett Birkhoff は私のノートの初期の版を読んでくれた。Barry の詳細なコメントや、構成、目標、歴史の組み込み方に関する Garrett

の注意は、ノートを本にするに当たって大きな助けとなった。

Debbie Borkovitz は私が基本的に最終版の原稿と考えていたものを読んでくれた。彼女の訂正、鋭い質問、そしてかけがえのない忠告により、私はほとんどすべての章を書き直すことになった。彼女が最後のできばえを気に入ってくれることを期待したい。

George Brauer は、4次剩余の相互法則や他の数学的成果に関するガウスの2つのドイツ語論文の英訳をくれることで多くの時間を節約させてくれた。

私は Larry Smith, Steve Sperber, Mike Rosen, Bill Messing に、多くの原稿訂正や何年にもわたる価値ある数学的議論について感謝したい。

Victor Grambsch と、彼の Electric Images 社のスタッフは、多くの下手な図をきれいに書き直してくれた。

Sarah Jaffe は、MacWrite II で書かれた原稿を、フィルム化可能な最終の *TeX* 文書に直してくれた。4~5ヶ月の仕事と言っていたのが、私の遅れにより2年以上にもわたってしまった。彼女の忍耐とすばらしい仕事に本当に感謝する。

最後に私の妻 Anne に感謝したい。彼女は原稿の多くの部分を読んで、一生懸命私の文体を改善しようとしてくれた。過去3年間、彼女は繰り返し「あとどれぐらいかかるの?」と尋ね、私の「先週もそう言ったね」という答えに対する彼女の反応は、私が優柔不断を克服して有限の時間で本を仕上げるようにしてくれた。

## 改訂第2刷への言葉

この第2刷で多くの訂正を許可してくださった出版社に謝意を表したい。しかしながら、これは訂正版であって、第2版ではない。ほとんどの訂正是数学あるいは英語の誤植である。9.6節にあるシュヴァレーの定理の誤った証明は訂正した。ヤコビ記号に関する11.8節が、この本への唯一の追加部分である。参考文献や索引には訂正箇所はまったくない。

本書の内容に関して、また本書が歴史的動機付けを用いていることに関して、肯定的な意見を寄せてくださった方々、そして正誤表や第2版への提案を

送ってくださった方々に感謝したい。特に Gareth and Mary Jones と Mara Neusel は、きわめて詳細なリストを作ってくださった。ここに謝意を表したい。

本書には、素数の分布とそれに関連する解析的整数論の分野についてはほとんど述べられていない。この方面に興味がある読者は、Hardy and Wright の [Har-Wri], Tom Apostol の『*Introduction to Analytic Number Theory*』(Springer-Verlag, 1976), そして歴史的視点から Ellison and Ellison の [Ell, W-Ell, F] をお勧めする。