第2版への序文

「代数関数体と符号」の第1版の出版から15年を経た後，Springer Verlag社の数学編集者たちにより，この本を改訂増補することを勧められた．

非常に多くの小さい訂正をしたほか，第2版は二つの点で第1版とは異なっている．最初に，各章の終わりに一連の演習問題を含めた．これらの演習問題のあるものはかなり易しく，読者が基礎的な概念を理解するための助けになり，その他のものは発展した問題で，追加した題材に対応している．二つ目は “Asymptotic Bounds for the Number of Rational Places”（有理的座の個数に対する漸近的限界）と題された新しい章が付け加えられたことである．この章には有限体上の関数体の漸近的理論の詳細な解説があり，それはある漸近的に良い塔と最良の塔の具体的な構成を含んでいる．これらの塔に基づいて，Tsfasman-Vladut-Zink Theoremの完全でかつ自己完結的な証明が与えられる．この定理はおそらく関数体の符号理論へのもっとも美しい応用である．代数関数体から構成された符号は，最初V. D. ゴッパによって導入された．したがって，私は第1版ではそれらをgeometric Goppa code（幾何学的ゴッパ符号）と呼んだ．この術語は文献では一般に受け入れられなかったので，第2版ではより一般的なalgebraic geometry code（代数幾何符号），あるいはAG code（AG符号）という術語を用いる．

第2版を準備する際にご助力いただいたAlp Basenや，Arnaldo Garcia，Cem Güneri，Sevan Harput，Alev Topzoğluに感謝したい．さらに，追加した演習問題の作成に携わった人たちの名前を引用しなかったが，それらに協力していただいたすべての人たちに感謝する．

İstanbul, September 2008

Henning Stichtenoth

第1版への序文

K 上の代数関数体とは，有理関数体 $K(x)$ 上有限次の代数拡大体のことである（基礎体 K は任意の体としてよい）．この種の体拡大は代数幾何学や数論，そしてコンパクトリーマン面の理論のようなさまざまな数学の分野で自然に現れる．したがって，非常に多様な観点から代数関数体を研究することができる．

代数幾何学においては，代数曲線 $C = \{(\alpha, \beta) \in K \times K \mid f(\alpha, \beta) = 0\}$ の幾何学的性質に興味がある．ただし，$f(X, Y)$ は代数的閉体 K 上 2 変数の既約多項式である．C 上の有理関数体 $K(C)$（これは K 上の代数関数体である）は，曲線 C の幾何学に関する非常にたくさんの情報を含んでいることが分かる．代数関数体のこの側面は，代数幾何学に関するいくつかの文献に述べられている．たとえば，文献 [11] や [18], [37], [38] などがある．

また，複素解析学のほうから代数関数体に入っていくこともできる．コンパクトリーマン面 S 上の有理型関数は，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数関数体 $\mathcal{M}(S)$ をつくる．ここで，再び関数体は対応しているリーマン面を研究するための強力な道具となる．文献 [10] あるいは [20] を参照せよ．

本書では，自己充足的でかつ純粋に代数的な代数関数体の解説を与える．この方法は（複素数体 $\mathbb{C}$ で）R. デデキントや L. クロネッカー，H. M. ウェーバーらによって 19 世紀に始められた．文献 [20] を参照せよ．そしてこの方法はさらに，20 世紀の最初の 50 年の間に，E. アルティンや H. ハッセ，F. K. シュミット，A. ヴェイユらによって発展してきた．標準的な文献は C. シュヴァレーの *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable* [6]（1 変数の代数関数論）（1951 年に出版された）と文献 [7] である．代数的整数論との密接な関係は文献 [1] と [9] で明確に述べられている．

代数関数への代数的アプローチは，代数幾何学を介して学ぶ方法よりも初等的である．すなわち，ガロア理論を含めたいくつかの体の代数拡大の基本的な知識のみが仮定されている．2 番目の利点は，関数体のいくつかの主要な結果（リーマン・ロッホの定理のような）を任意の定数体上の関数体に対して非常に速く導くことができる，ということである．このことは代数関数の符号理論への応用に関する説明を容易にする．これは本書の第二の目的である．

誤り訂正符号は $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間，すなわち，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上 n 次元の標準的なベクトル空間

のことである．このような符号は，情報の信頼度が高いことを必要とする伝達に対して広く用いられている．1975 年に V. D. ゴッパが注意したように，$\mathbb{F}_q$ 上の代数関数体を用いて興味ある符号の大きなクラスを構成することができる．これらの符号の性質は，対応している関数体の性質に密接に関連している．また，リーマン・ロッホの定理はそれらの主要なパラメーター（次元や，最小距離）に対して，多くの場合に厳密な評価を提供する．

ゴッパの構成法はもっとも重要なものであるが，それは単に符号と代数関数を結びつけるだけではない．たとえば，ハッセ・ヴェイユの定理（これは有限な定数体上の関数体の理論において基本的である）はあるトレース符号における符号語の重みに関する評価を与える．

本書の簡単な概略は次のようである．

代数関数体の一般論が，第 1 章や第 2 章，第 3 章で展開される．最初の章では，基礎的な概念が導入され，リーマン・ロッホの定理の A. ヴェイユによる証明が与えられる．第 3 章はおそらくもっとも重要である．この章は，具体的な関数体をうまく扱うために必要な道具を提供する．すなわち，有限次拡大における座（place）の分解や分岐，差積，フルヴィッツの種数公式，定数拡大の理論などである．微分とヴェイユ微分の間の関係とともに P-進完備化が第 4 章で扱われる．

第 5 章は有限定数体上の関数体を扱う．この章はハッセ・ヴェイユ限界を少し改良しただけでなく，ハッセ・ヴェイユの定理のボンビエリによる証明も含んでいる．一般論の実例として，以下のような関数体のいくつかの具体的な例が第 6 章で論じられる．すなわち，楕円関数体や超楕円関数体，有理関数体のクンマー拡大やアルティン・シュライアー拡大などである．

第 2 章や第 8 章，第 9 章は代数関数体の符号理論への応用にあてる．符号理論の簡単な導入に続いて，代数関数体によるゴッパ符号の構成が第 2 章で説明される．また，これらの符号が BCH 符号や古典的ゴッパ符号の重要なクラスと共有する関係も，この章で解説されている．第 8 章は次のようないくつかの補足を含んでいる．幾何学的ゴッパ符号の留数表現や，符号の自己同型写像，漸近問題，幾何学的ゴッパ符号の復号などである．また，エルミート関数体に付随した符号の詳細な解説を与える．文献上でこれらの符号はしばしば幾何学的ゴッパ符号の有用性に対する判定として用いられる．

第 9 章は部分体部分符号とトレース符号についてのいくつかの結果を含んでいる．それらの次元に対する評価が与えられ，ハッセ・ヴェイユ限界を用いて，重みや次元，そしてこれらの符号の最小距離が得られる．

読者の便宜のため，二つの付録を付け加えた．付録 A は本書でしばしば用いられる体論からの結果の要約である．幾何学的ゴッパ符号についての多くの論文が代数幾何学の言葉で書かれているので，付録 B は代数関数体と代数曲線論の間の一種の辞書の役割を果たすであろう．

謝辞

まず，私が代数関数論を学んだ P. Roquette 先生に恩義を受けている．というのは，ハイデルベルグ大学で 20 年前に受けた講義は，本書の代数関数論に本質的な影響を与えているからである．

原稿を注意深く読んでくれた何人かの同僚に私は感謝したい．D. Ehrhard，P. V. Kumar，J. P. Pedersen，H.-G. Rück，C. Voss，K. Yang である．彼らは初期の版においてたくさんの部分を改良し，非常に多くのミスプリントを修正し．また間違いを減らしてくれた．

Essen, March 1993

Henning Stichtenoth