まえがき

群論的対称性は量子力学における最も基本的な概念であり，物理学の様々な分野で活用されてきた．量子系の特徴を積極的に用いて情報処理を行う量子情報においても，群論的対称性が重要な位置を占める．特に量子論では，様々な群の表現が量子系に現れるため，群の表現論が重要な役割を果たす．いくつかの量子論のテーマではその根幹の部分で表現論的な考え方が基礎となっているにも関わらず十分に意識されていないことが多い．このようなテーマでは，表現論的構造を意識することで，より深くその問題が理解できるだけでなく，一般化が容易に可能となることが多い．しかしながら，量子論の数理的基礎付けにおいては，これまで作用素代数的な手法や偏微分方程式の手法が重視され，表現論的手法は十分に重視されてきたとは言いがたい．そのため，量子論に現れる様々な表現論的な手法をまとめた書籍は英文のものを含めて決して多くない．一方，数学の内部では表現論に関する蓄積は目を見張るものがあるものの，既存の表現論の書籍は以下にあげる問題があるため，量子情報を含む量子論の研究者にとってアクセスしやすい形になっていないのが現状である．

量子論に有益な表現論の知識は表現論の様々なテーマに分かれているため，それらが細分化され，1つの本にまとまっていない．表現論を数学分野として研究する立場からは，どうしても個別の表現論のテーマについて特化された記載となってしまう．表現論はどうしても煩雑な記号を用いることになるが，異なる書籍に跨って記載されている内容を扱う場合，これらの書籍の間での記号

の読み替えだけでも大変な手間となってしまう．特に，量子論で重要となるのは実 Lie 群の表現であるが，実 Lie 群の表現の分類には対応する実 Lie 環の表現を経由することになる．しかし，多くの数学書では複素 Lie 環の表現に重点が置かれており，実 Lie 環に重点を置いたものは少ない．複素 Lie 環の表現に対して適切な読み替えを行うことで，実 Lie 環の表現は得られるが，これについて丁寧に記載されている書籍は少ない．特に，実 Lie 環の表現への対処は煩雑さが増えるので，避けられる傾向にある．既存の数学書では，このように個別のテーマについての丁寧な解説はあるものの，量子論への応用のためにはそれらをつなぐ必要があり，その接続部分について丁寧に書かれている書籍は少ない．物理学者向きの書籍はそれなりにそのような点に配慮はあるものの細部の省略が多く，説明が十分でないこともある．さらに，量子論では通常の表現に加え，射影的表現が重要な役割を果たすが，射影的表現については，多くの数学書では十分に扱っていない．特に，射影的表現の場合の一般化はある意味で自明な場合が多いが，意外と微妙な点を含んでおり，この点が，量子論の観点からも重要なポイントとなることがある．この他，いくつかの表現論のテーマは，多くの数学書では，過度に一般化された形で記載されており，量子論への応用で必要な場合での具体的な記載が少ない．用いられている記号が量子論へ応用しやすいものになっていない．このように，量子論の研究者が表現論に対してアクセスする妨げとなっている要因はたくさんある．

本書の内容は，基本的には数学としてはよく知られている表現論の知識からなるが，量子論の立場から，量子論のテーマに応用しやすいよう再構成している．そのため，記号も量子論のものを用いている．そして，量子論への応用のために必要となる表現論の複数のテーマを扱うことで，量子論における表現論の全体像が見えやすくなっている．同時に，これらの複数のテーマの間の類似性を強調しているので，テーマ間のアナロジーが効きやすいように構成されている．これにより，やや進んだ表現論のテーマも比較的容易にそのポイントを掴むことができる．このように，表現論的考え方が量子論の理解のための基本的なインフラとして機能するように構成されている．著者は主に量子情報を専門に研究しているため，本書の内容は量子論の中でも量子情報への応用を意識したものであるが，本書にまとめられた内容は，量子情報の分野を超え，量子論全般の理解にとって有益なものになると考えている．そのため，本書を読破した暁には，量子論を表現論の視点からより深く理解することが可能となるで

あろう．さらに，本書の姉妹編である『量子情報への表現論的アプローチ』を読み進めることも可能である．

以下，各章の構成について述べる．第 1 章では，測定，状態，合成系，エンタングルメントなどの量子論の基礎概念を説明し，量子系を記述するための数学的な記号を準備する．ここで導入する記号は，群の表現論を扱う上でも，便利なものが多い．本書では，この章で導入する記号の下で一貫して群の表現論を扱う．

第 2 章では，一般の群についての表現論を扱う．特に，標準的な表現の範囲に留まらず，量子論で重要となる射影的表現についても詳しく説明する．射影的表現は群の拡大と関係が深く，この点について詳しく触れる．射影的表現まで含めて表現論を議論するには，因子団を用いた扱いが必要となり，煩雑な記述となる．一般に射影的表現に拡張する議論は，本質的でない上に，記述の煩雑さだけが増すので，標準的な表現論のテキストでは射影的表現の扱いは極めて少ない．しかし，射影的表現に拡張する議論は量子論への応用を考えた場合本質的であるので，本書では，あえてこのような基礎的内容からスタートした．本書では，後の章も含め因子団を用いた射影的表現に関する議論を行っており，この点は類書にない特色である．また，有限群の場合には，より踏み込んで，群上の Fourier 変換についても触れる．この概念は，解析学と代数学を結びつける概念である．さらに，有限群の代表例である置換群の表現についても触れる．

第 3，4，5 章では，Lie 群と Lie 環の表現論を扱う．特に，第 3 章では，以下に述べる個別の Lie 群，Lie 環に依存しない一般的な議論を扱う．従来のテキストでは，Lie 群，Lie 環の射影的表現について扱ったものがなかったが，第 3 章では第 2 章での議論を組み合わせることで，Lie 群，Lie 環の射影的表現についても扱う．さらに，Lie 群上での Fourier 変換についても射影的表現の場合も含めて扱った．その他，第 6 章の議論で必要となるいくつかの基礎概念についても触れる．続く，第 4 章では具体的な Lie 群の表現論を扱った．Lie 環の表現は最大ウェイトによる分類が可能であるため，Lie 群の表現は対応する Lie 環の表現から扱った方がわかりやすい．また，量子論でも，Lie 環が重要な概念となることが多い．そのため，第 4 章では Lie 環の表現から Lie 群の表現を与える構成をとった．最初に，Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現を扱う．前者と後者はコンパクト性の有無で扱いが異なるが，意外にも共通点が多いので，統

一的に扱う．その後に，Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ を扱い，その Young 図形との関係について述べる．特に，テンソル積空間上での表現は置換群の表現と密接に結びつき，その構造は Schur 双対とよばれる．また，Lie 群の働きを離散群で実現する問題はデザインとよばれるが，デザインについても扱った．第 5 章では一般の Lie 環，Lie 群の表現を扱った．ここでも同様に，Lie 環の表現から Lie 群の表現を与える手法をとった．第 5 章ではコンパクト Lie 群だけでなく，一部の非コンパクト Lie 群の表現も扱った．非コンパクト Lie 群の表現は極めて複雑で難解であるが，本書では量子論と関係の深い一部のタイプの表現のみ扱うことにした．このようなタイプの表現は，コンパクトな場合とのアナロジーが効くので相対的に理解が容易である．この章は（特に後半部分は）かなり進んだ内容であるので，最初は飛ばして読むことも可能である．

第 6 章では Bose 量子系を与える Heisenberg 表現を扱った．Heisenberg 表現は射影的表現となるので，第 3 章での射影的表現の一般論がここで生かされる．また，スクイジングに対応する $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現についても扱う．さらに，多モードの量子系についても扱う．この量子系は連続変数系ともよばれ，一面において実装が容易な量子系として注目されている．同時に，場の量子論で現れる第二量子化についても簡単に触れる．この部分でテンソル積状態の物理的な意味についても触れる．なお，第 6 章の後半の*を付した節については，第 5 章の後半の知識が必要となる．第 7 章では，第 6 章で扱った表現の離散版である離散 Heisenberg 表現を扱う．一般に，離散 Heisenberg 表現は有限体を基礎に構成されるが，可換環 $\mathbb{Z}_d$ を基礎に構成する場合もあり，第 7 章では双方の場合について扱う．さらに，第 6 章でのスクイジングに対応する表現の離散版についても扱う．これらの表現は量子誤り訂正とも密接な関係にある．第 7 章は構造的に第 6 章と関連しているものの，第 6 章とは独立に読むことも可能である．有限群の表現を扱っているため，第 7 章は第 2 章を読んだ後に読み進めることも可能である．

なお，特に込み入ったテーマを扱った部分については，節や例のタイトルに*を付すことにした．この部分は，後の部分でも，*を付した部分にのみ使われる内容であるので，*を付した部分を飛ばして読んでも理解できるように構成されている．初学者にはなるべく，*を付した部分を飛ばして読むことを勧める．その他，本書では，表現論に関連する記号の煩雑さを考慮して，複数の記号表を第 1 章の前にまとめてある．適宜，この記号表を参照の上，読み進め

てもらいたい．

このように，本書では量子論で有効となる表現論の知識をまとめ，その上で，表現論に基づいた量子論の基礎を与えた．本書を通じて，一人でも多くの方が量子論と表現論に興味を持って頂けたら著者の望外の喜びである．最後に，本書をまとめるにあたってご協力して頂いた多くの方々に感謝の意を表したい．とりわけ，名古屋大学の伊師英之准教授，熊谷亘博士，北海道大学の洞彰人教授，山形大学の三枝崎剛博士には，本書をまとめる上で適切な助言を頂いた．また，共立出版の寿日出男氏，赤城圭氏には原稿をまとめる上で大変お世話になった．これらの方々には感謝の意を表したい．

林　正人