目　次

記号表 xv

第 1 章　量子系の数学的基礎 1

1.1　系，状態および測定 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
1.2　合成系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
1.3　多体系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9

第 2 章　群の表現論 11

2.1　群と等質空間 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 11
2.2　群の拡大 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15
2.2.1　一般の群の拡大 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15
2.2.2　可換群の中心拡大 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 17
2.2.3　中心拡大の具体例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 19
2.3　群の表現と射影表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 21
2.3.1　表現と射影表現の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 21
2.3.2　Schur の補題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 26
2.3.3　直積群の表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 29
2.4　射影的表現と群の拡大 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 31

2.4.1 射影的表現の因子団 ····· 31
2.4.2 既約性と射影的表現 ····· 32
2.4.3 U(1) による拡大 ····· 34
2.5 半直積と表現 ····· 34
2.5.1 基本的な関係 ····· 34
2.5.2 一般的な表現の構成* ····· 35
2.6 実表現と複素共役表現 ····· 37
2.6.1 実ベクトル空間とその複素化 ····· 37
2.6.2 実表現 ····· 38
2.6.3 複素共役表現 ····· 39
2.7 合成系上の表現 ····· 40
2.8 有限群での Fourier 変換 ····· 44
2.8.1 離散 Fourier 変換 ····· 44
2.8.2 指標と直交性 ····· 45
2.8.3 Fourier 変換 ····· 49
2.9 置換群の表現と Young diagram ····· 50
2.9.1 Young diagram と Young tableau ····· 50
2.9.2 置換群と Young diagram ····· 52
2.9.3 Plancherel 測度 ····· 53

第 3 章 Lie 群と Lie 環の表現論の基礎 55

3.1 Lie 群 ····· 55
3.1.1 基本的な例 ····· 55
3.1.2 解析力学に現れる対称性 ····· 58
3.1.3 複素 Lie 群 ····· 60
3.1.4 その他の実 Lie 群の例 ····· 61
3.2 Lie 環 ····· 62
3.3 Lie 群と Lie 環の関係 I ····· 65
3.3.1 無限小変換と Lie 環 ····· 65
3.3.2 具体例 ····· 67
3.3.3 実 Lie 環の中心拡大 ····· 70
3.4 Lie 環の表現 ····· 71

3.4.1 実 Lie 環の表現 ····· 71
3.4.2 実表現 ····· 74
3.4.3 複素 Lie 環としての表現 ····· 74
3.4.4 随伴表現 ····· 74
3.4.5 射影的表現 ····· 75
3.4.6 半直積 Lie 環と表現 ····· 76
3.5 Killing form とコンパクト性 ····· 78
3.5.1 Killing form ····· 78
3.5.2 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコンパクト性 ····· 79
3.5.3 Casimir 作用素 ····· 82
3.6 Lie 群と Lie 環の関係 II ····· 83
3.6.1 普遍被覆群 ····· 83
3.6.2 表現との関係 ····· 86
3.6.3 射影的表現 ····· 88
3.6.4 複素 Lie 群としての表現 ····· 88
3.7 群と等質空間上の不変測度 ····· 89
3.8 Lie 群での Fourier 変換 ····· 92

第 4 章 簡単な Lie 群と Lie 環の表現 97

4.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ とその部分群 ····· 97
4.1.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の Gauss 分解 ····· 97
4.1.2 $\mathrm{SU}(2)$ の構造 ····· 98
4.1.3 $\mathrm{SU}(1,1)$ の構造 ····· 100
4.2 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約歪エルミート表現 ····· 103
4.2.1 既約歪エルミート表現の構成 ····· 103
4.2.2 Lie 群のユニタリ表現と実表現 ····· 107
4.2.3 Casimir 作用素 ····· 108
4.2.4 テンソル積 ····· 109
4.2.5 コヒーレントベクトル ····· 111
4.3 $\mathrm{SU}(r)$ と $\mathrm{U}(r)$ の既約ユニタリ表現 ····· 113
4.3.1 $\mathrm{SU}(r)$ の既約ユニタリ表現 ····· 113
4.3.2 $\mathrm{U}(r)$ の既約ユニタリ表現 ····· 116

4.3.3　既約表現空間の次元 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・117
4.3.4　テンソル積 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・118
4.3.5　SL$(r,\mathbb{C})$, GL$(r,\mathbb{C})$ の既約表現 ・・・・・・・・・・・・・・・121
4.4　複数の量子系からなる合成系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・121
4.4.1　識別可能な場合 : Schur 双対性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・121
4.4.2　識別不能な場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・124
4.5　Lie 群と等質空間の離散化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・125
4.5.1　群上のデザイン ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・125
4.5.2　等質空間上のデザイン ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・130
4.5.3　近似的なデザイン ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・131

第 5 章　一般の Lie 群と Lie 環の表現　133
5.1　ルート系とその分類* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・133
5.2　コンパクト Lie 環の構造* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・135
5.3　複素半単純 Lie 環の構造* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・140
5.4　コンパクト半単純 Lie 環の歪エルミート表現* ・・・・・・・・・・・・144
5.5　部分代数と部分ルート系* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・146
5.6　$\mathfrak{sp}(r)$ の構造* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・153
5.7　複素構造とコヒーレント状態* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・155
5.8　非コンパクト半単純 Lie 環の構造* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・157
5.9　非コンパクト単純 Lie 環の歪エルミート表現* ・・・・・・・・・・・・159
5.10　一般の非コンパクト Lie 環とその歪エルミート表現* ・・・・・・・163

第 6 章　Bose 粒子系　165
6.1　1 モードの Bose 粒子系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・165
6.1.1　1 自由度の量子系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・165
6.1.2　1 モードの Bose 粒子系と 1 自由度系との関係 ・・・・・・・・・167
6.1.3　1 モードの Bose 粒子系の性質 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・169
6.1.4　拡大 Heisenberg 表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・170
6.2　多モードの Bose 粒子系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・173
6.2.1　多自由度の量子系 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・173
6.2.2　多モードの Bose 粒子系と多自由度系との関係 ・・・・・・・・・174

6.3 ユニタリ群 $\mathrm{U}(r)$ による変換 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・175
6.3.1 ビームスプリッターによる相関 ・・・・・・・・・・・・・・・・・175
6.3.2 既約分解に対応する変換 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・179
6.3.3 半直積群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})\rtimes\mathrm{U}(r)$ の表現とコヒーレント状態* ・180
6.4 第二量子化と Bose 粒子 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・182
6.5 1 モードのスクイズド状態 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・184
6.6 2 モードのスクイズド状態* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・187
6.7 Heisenberg 表現の Fourier 変換* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・189
6.8 多モードのスクイジング* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・191

第 7 章 Bose 粒子系の離散化 195

7.1 離散 Heisenberg 表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・195
7.1.1 $\mathbb{Z}_d$ 上の離散 Heisenberg 表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・195
7.1.2 $\mathbb{F}_q$ 上の離散 Heisenberg 表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・198
7.1.3 多自由度の離散 Heisenberg 表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・200
7.1.4 部分群の既約表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・203
7.2 離散シンプレクティク群と Clifford 群 ・・・・・・・・・・・・・・・・205
7.2.1 離散シンプレクティク群と Clifford 群の定義 ・・・・・・・・205
7.2.2 生成元 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・206
7.2.3 自己直交部分群の構造 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・209
7.3 メタプレクティク表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・210
7.3.1 射影的ユニタリ表現の存在 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・210
7.3.2 表現の具体的構成 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・211
7.3.3 既約分解などの性質 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・214
7.4 MUB と SIC POVM* ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・217

演習問題略解 223

参考文献 229

索 引 233