

まえがき

本書には、有限要素法の入門から固体・流体での問題、生物モデルなどに現れる反応拡散系までの解法が、アダプティブメッシュ法や領域分割法を交えながら書いてある。読者は理論だけでなく、FreeFem++を組み込めばパソコンで本書の 50 近い例題を自分で数値計算できる。

これを実現したのは、偏微分方程式境界値問題を数学的に有限要素法で解くパリ第 6 大学 J. L. Lions 研究所が開発している有限要素解析ツール FreeFem++に依るところが大きい。本書を読めば、数理モデルの数値計算で必要だったコンピュータ用言語の修得を不要とし、有限要素解析のアルゴリズムがそのまま実計算に使えることを実感するはずである。FreeFem++はブラックボックスでなく、メッシュや有限要素空間、そして境界値問題が生成する連立方程式を取り出す命令がある。有限要素法の初心者には有限要素法の仕組みを知るための教材として、研究者には商用ソフトにない機能を実現するために使うこともできる。本書で得た知識は有限要素計算ツールを理解する上でも非常に有効であり、内容はコンピュータが進歩しても陳腐化しないと信じている。

有限要素法の基本は第 1 章・第 2 章で修得できる。第 3 章は 3 次元問題を解くためのヒントやより良い解を求めるためのヒントになっている。第 4 章では固体・流体問題を扱っている。第 5 章には生物モデルなどに現れる反応拡散系の計算例がある。最終章は、有限要素法の数理について知りたい読者のためのノートになっている。具体的にその内容を書いておく。

第 1 章は 1 次元問題を例に有限要素法の紹介、ポアソン方程式 $-\Delta u = f$ で記述できる薄膜、静電場、熱の数理モデルを解説した。その後に連続体力学を概説した。第 2 章では、ポアソン方程式を有限要素法で解く方法を (1) メッシュ生成、(2) 有限要素空間、(3) 弱形式から剛性行列（連立方程式）を作る過程、(4) 連立方程式の数値解法、(5) 数値可視化を含む解の評価について述べた。

第 3 章では、3.1 節でメッシュの構造、3 次元での 4 面体メッシュ分割、アダプティブメッシュ生成における制御方法など、3.2 節でラグランジュ型以外の有限要素、3.3 節で異なるメッシュ上の有限要素空間での補完、3.4 節で剛

性行列を取り出す計算法, 3.5 節で固有値問題をとりあげるなど, より高度な解析方法について述べた. 第 4 章では, 連続体力学の問題を解くための準備としてベクトル解析, そして最適形状設計問題を含む固体力学, さらに流体問題を解くために混合型有限要素法, 特性曲線有限要素法近似について説明してから, ナビエ・ストークス方程式について解法を述べた.

第 5 章では, 5.1 節で反応拡散系の問題に現れる様々なパターンをとりあげ, 実際にいくつかの例を FreeFem++ で解きながら反応拡散方程式の持つ性質について述べた. さらに, この分野の数値シミュレーションに興味を持った人のために, 5.2 節ではパターン形成のシミュレーションにおけるアダプティブメッシュの有用性を, 5.3 節では 3 次元のパターンの数値シミュレーションについて述べた.

第 6 章は第 2 章から第 5 章までの有限要素解析の背景となる数学理論に関するノートである. 有限要素法では数値計算するために無限次元空間で記述される数理モデルを有限次元空間で近似している. そのため, 真の解と有限要素近似とを比較することは数学での重要テーマであって, その結果は実際の数値計算にも影響を与えていた. 有限要素法について知りたい読者は, 有限要素法の数学的背景の存在を知るためのノートとして参考にしていただきたい. 最後に付録として, FreeFem++ のプログラム言語としての仕様を簡単にまとめ, 必要とする資源について簡単に述べた.

筆者等は日本応用数理学会研究部会「連続体力学の数理」に属しており, 第 1 章～第 4 章, 第 6 章と付録を研究代表者の大塚厚二, 第 4 章流体の一部と第 5 章を高石武史が分担した. 研究部会「連続体力学の数理」は破壊現象を数理研究する数学者と, 工学との研究交流の場として阪神淡路大震災の 1995 年に発足した研究会が母体となっている. 数学出身の筆者は, 工学者との研究交流において数学理論と直結した数値計算ソフトウェアが必要と思い, そのソフトウェアの設計思想を数理指向ソフトウェアと名付け, 本書の副題「数理思考」の由来となっている. 結局, 自力開発をあきらめて, パリ第 6 大学の O. Pironneau 教授が中心となっている FreeFEM プロジェクトに参加し, FreeFem++ プロジェクトの一員として本書を書くことになった.

本書を執筆・編集するに当たり, O. Pironneau 教授, F. Hecht 教授は勿

論, FreeFem++を育んでくれた INRIA (フランス国立情報学自動制御研究所), パリ第六大学 J. L. Lions 研究所での數学者と理論工学・物理学者そしてコンピュータ科学者には深謝の意を表する. 出版に際したいへんお世話になった共立出版株式会社編集部の諸氏, 本書の執筆・編集の機会を与えてくださった日本応用数理学会出版担当理事の西垣一朗氏に感謝の意を表したい. 大塚は, 形状最適化問題を名古屋大学教授の畔上秀幸氏に, 有限要素法について東京大学名誉教授の菊地文雄氏, さらに九州大学名誉教授の田端正久氏には流体についてご教示いただくなどこの機会に感謝の意を表したい. 高石は, 第 5 章のチェックをしていただいた長山雅晴 (北海道大学), 小川知之 (明治大学), 上山大信 (明治大学) の各氏に謝意を表する.

本書での情報収集や形状最適化設計の研究などには, JSPS 科研費・基盤研究 (B) 「特異性を持つ連続体力学の数理研究 (19340027)」(代表者大塚, 平成 19 年度~21 年度), 基盤研究 (C) 「特異性を持つ形状最適設計問題及び破壊での変分理論構築と工学への応用に関する研究 (23540258)」(代表者大塚, 平成 23 年度~25 年度) の助成を受けている. 他に, 基盤研究 (C) 「フェーズフィールドモデルを用いた亀裂進展現象の解析 (23540174)」(代表者高石, 平成 23 年度~25 年度) の助成も受けている.

2013 年 12 月

大塚 厚二, 高石 武史