

# はじめに

## — 数学的活動による学習過程の実現への序説 —

本書は、算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成原理を示す。本論でその内容を示すに際して、その序説として、本書が迫る数学教育学における根源的な問いを記し、「数学的活動」を本書内で「数学化」と解題する理由、そして本書の副題のもつ意味を述べる。

### ■ なぜ、数学を教えるのか

- 算数・数学では何をどのように教えるのか。それは、なぜか。
  - なぜ、その内容を子どもは学ぶ必要があるのか。
  - なぜ、そのように内容を教えたいのか。

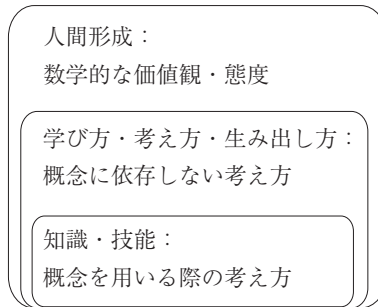


図 P.1 数学教育の目標を考える三層

なぜ、数学を教えるのか。それは、次世代を担う人間を育てる一貫としてである。次世代とは我々亡き後の社会をも担う人間である。日本の教育用語「自ら学び自ら考える子どもを育てる」の意図もそこにある<sup>1)</sup>。そして、「自ら学び自ら考える子ども」こそが、今日の教育界が求める人間像である<sup>2)</sup>。

1) 清水静海による。

2) それは自律した人間像とみることもできる。岡田敬司 (2011). 『自律者の育成は可能か: 世界の立ち上がりの理論』ミネルヴァ書房。

数学教育の目標は、図 P.1<sup>3)</sup> の包摂関係で説明される。仮に、数学に係る知識・技能をルーティンとして教えることをめざす方がいたとする。ノンルーティンな課題に取り組めるようにするには、考え方を教える必要があることにすぐに気づく。考え方を教えようとするそれが容易でないことにも気づく。そこでは、子どもが自ら考えようとする必要がある。「自ら学び自ら考える子どもを育てる」には、価値観・態度の育成も、考え方の育成も欠かせない。

このように目標をとらえたとしても、目標を実現する教材は数学である。教材とは内容としての数学に目標が埋め込まれたものである。何をどういう順序でいかに教えるのかという問いは、上述の三層を視野に、内容に目標を埋め込む行為、内容に目標を自ら認める行為としての教材研究を通して解答できる。例えば、教科書を開いて、そこで目標が語れなければ、教科書の単元配列や学年間の系統が描けなければ、それは教材ではない。数学内容に目標を埋め込むには内容に対して指導系統を構成し、教材を生み出す必要がある。そのためにはどうすればよいのか。

その指導系統、例えば教科書教材に具体化された教育課程はもとより数学体系とは異なる体系をなす。それはいかなる系統で、どのような原理に基づいて構成すればよいのだろうか。それは、次の問いに答えないと解答できない。

## ■ 人間形成としての数学教育とはどのような教育か。

➤ それはどのような原理のもとで実現しえるのか

人間形成としての数学教育、それは数学を人間の営みとみなし、その営みそれ自体をも教育目標とみなす教育である。「自ら学び自ら考える子ども」を育てるにはその営みがある。そこでは、まず、人間の営み、活動とは何かを問い直す必要がある。半世紀前、数学体系を教える New Math が数学教育研究の主題となった時代があった。その時代に、その問い直しを行ったのが Hans Freudenthal である。彼は、数学教育界最上位の世界組織、数学教育国際委員会 ICMI を代表し、人間が学ぶべきは、現実を数学化する活動であり、数学を数学化する活動であるという数学化論を提唱し、その世界動向を率い、今日の数学教育学の礎を築いた。彼に代表される数学教育思潮は今日、日本の教育課程を象徴する教科書が国際的に賞賛される基盤ともなった。

---

3) Isoda, M., Katagiri, S. (2014). *Pensamiento Matemático: Cómo desarrollarlo en la sala de clases. Centro de Investigación Avanzada en Educación.*

後述するように本書は「自ら学び自ら考える」人間形成をはかる学術的前提として、それを保証する認識論である構成主義を採用する。そして、本書では、「自ら学び自ら考える」人間形成を目的に数学を教えることを、数学を活動として教えることとみなす。そう定めることで、何をという問いは残しつつ、どういう順序で数学を教えるのかという問いに対して、「数学化する系統」でと答えることに集約できる。本書のタイトル、「算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成」は、その系統作りのために数学化に基づく学習過程の構成原理を示すものである。

その原理を話題にするには、次の問いに答えることが必要になる。

## ■ 数学的活動としての数学化とは何か

問題は、この問いにいかにか答えるかである。我が国の算数・数学科教育課程史上、数学を活動を通して教えること、学べるようにすることの提案は、例えば1947年の学習指導要領（試案）にみることができる。当時、その活動という語は、今日的な意味でのDeweyの認識論（知識論）のもとで採用された。他方で、当時は、教育学一般では、社会生活を基盤にした単元による学習にみる活動、民主主義を求めた活動と解釈され、その本質は見失われた経過にある。

Freudenthalは、そのような活動という語が教育で抱えてきた歴史的危うさに鑑み、数学的活動を、数学化という語で表し、「蓄積した経験の数学的方法による（再）組織化」として定義した。そして、日本では、数学的活動は、1999年の学習指導要領で改めて目標とされた。注目すべきことは、その規定がFreudenthalの数学化に通じることである。そして、彼の考え方は、Deweyの知識論（認識論）やPiagetの発生的認識論に通じるものでもある。そうであればこそ、彼の数学教育論は今日の数学教育学の普遍的古典とみなされ、繰り返し引用されるのである。

彼の数学化論は、著名な数学者としての彼の数学経験と数学史家として見識を反映し、数学とその教育両方に通じる認識論である。例えば、PiagetはFreudenthalの数学史研究を根拠に、発生的認識論を論述している。では、なぜ、それほどまでに有意な理論を半世紀を経て改めて話題にする必要があるのか。その必要は、Freudenthal研究所の彼の弟子、後継者達が、数学や数学史からは外れた数学教育に固有な用語として数学化を再定式化したことに始まる。何よりも興味深いことは、彼はその状況に不満を述べ、自らの考えである数学化を「生きる

vi はじめに

世界」の再定式化という形で解題したことである。

彼の後継者達が、彼の本意にない語としてその語を用いた背景には、彼が用いた水準という語の活用困難性がある。彼は、van Hiele の思考水準論を範例に数学化を解説した。van Hiele が水準を幾何に限定し解説したのに対して、Freudenthal はその水準を van Hiele とは異なる意味で柔軟に拡張した。

数学的活動による学習過程の構成原理を明らかにすることをめざす本書は、彼の数学化論をその真意に沿う形で今日的に拡張的に再定式化する。その意義は、水準という語の必要を示すことで解説しえる。

### ■ 「先生、なぜそんなにやさしいことを、あんなに難しく説明したの。」

van Hiele は、「私の説明は全く変わっていない。変わったのは、生徒の方である。」と思考水準を設定するに至った経緯を綴っている。そこに、生徒の数学的な見方・考え方それ自体が再組織化がされたことの証、数学的思考には異なる水準があることの証がある。Freudenthal の数学化は、そのような再組織化、水準に準じ再構成される数学概念、彼の言葉では「組織化原理」に注目して記述される。

一般に数学の体系とは無矛盾な体系を指す。他方で、学校数学の体系と言えば、それは指導系統という時系列順序のある網の目状の教育内容の関係網を指し、教科書教材の系統に象徴される。その系統の中で数学を学ぶことは常に矛盾を乗り越える行為や、再組織化を進める行為を伴うものである。例えば、数学Ⅱ・数学Ⅲ・大学では積分の定義が異なる<sup>4)</sup>。積分の定義に着目するだけで、それぞれの局所的な体系の相違、そこに潜在する数学上の難しさ、矛盾を乗り越え、再組織化を進める必要が認められる。人間形成を目標とする数学教育において、優れた学校数学体系とえば、指導系統という網の目の繋がりを数学的活動を通して学べる体系である。「組織化原理」に注目すれば、その網の目から一つの再組織化の系統を取り出し階層的に記すことができる。彼の数学化は、彼自身の次の問いに対する学校数学における解答でもあった。

### ■ 数学はどのように形成しえるのか。数学化はどのような過程によってなしえるのか。

彼の死後、Freudenthal 研究所の末期（その後現在の形に改組された）には、数

4) 例えば、落合良紀 (2013)。高等学校数学における積分指導に関する研究。平成 24 年度筑波大学教育研究科修士論文。

学化という語さえも外し、状況のモデル、形式 (form) へのモデルという新モデル理論が提唱される。そこで数学的活動は、状況と形式の間にモデルを挟む教材の展開法において、子どもにとっての真実性を追究する目標に代替される。そして、彼が問題にした上述の優れた学校数学体系を構成する原理としての再発明、数学を再組織化する行為において指導系統を形成する彼の数学化論は、そのモデル理論のもとで彼の真意とは異なる意味で限定的に用いられることになった。

この状況を改めるべく、本書は、彼が提唱した数学化過程と水準を表象する枠組みとして、「表現世界の再構成過程」を提出する。

## ■ 何故、表現に着目すれば、数学の形成過程としての数学化が話題にできるのか。

今日、数学教育では、「表現」は教育目標の主要構成要素である。それゆえ、Freudenthal の数学化を今日的に再定式化する際、表現は極めて有益な視点となる。本書が提出する「表現世界の再構成過程」は、数学の表現とはいかなるもので、いかに形成されるのか、その過程を記すものである。本書では数学化過程において表現が進化していく様相を表すことで、彼の数学化を拡張的に定式化する。

本書の提出する表現理論の特徴は二点ある。それは、第一に、数学化過程、数学内容の進化過程を記す理論である。それは個別内容を、固定した表現様式に分類しない点に特徴がある。本書の主題は、個別内容の進化にある。固定した表現様式に分類しても数学がいかなる過程を経て進化するかは記せない。第二に、それは、教材の指導系統を表象する理論である。それはインフォーマル (informal)、フォーマル (formal) というような用語を排除した表現理論を構成しようとする点に特徴がある。本書の表現理論では、一見、フォーマルな表現であってもそれが数学上の表現として定式化されたものであるか、定式化されていないものであるか、を区別する。そして表現自体の内容の相違を個別表現の進化過程において記述することを実現する。

本書では、Freudenthal の数学化論を、このような筆者の関心のもとで「数学化過程の構成原理」として拡張的に定式化する。もっとも、このように考察を進めたとしても、具体的には内容を固定しないとその原理の妥当性は話題にしえない。

## ■ 何に着眼し数学化、表現世界の再構成過程を示すのか。

本書は、Freudenthal に準じて幾何以外の領域において水準が設定可能であることを示すために、教育課程の変遷が激しい関数領域を取り上げる。そして、関数の水準において「微分積分学の基本定理」を組織化原理とした場合の数学化に基づく指導過程を示す。その作業より、本書では「数学化過程の構成原理」を例証する。

## ■ 数学教育学とは何か。

➤ 数学教育学は教育実践にいかに関与するのか。

数学教育学が学として自立するとは何を指すのであろうか。本書は、学習指導要領などの教育課程基準や基準を具体化した教科書のない段階で、数学的活動による学習過程を構成する際の基本的な考え方を「数学化過程の構成原理」として提出する。それは、数学的活動を目標にして内容選択し学習過程を構成する教育課程構成の一般理論の基盤をなす。具体的には、その原理は対象とする数学内容を、いかなる順序で、いかに再組織化する形で教えれば、数学的活動による学習過程と言えるのかを説明する原理をなす。その原理は、数学的活動を実現する指導計画を構想する際にも、授業づくりに際しても必要な基準となる。

本書の学術的意義は、数学的活動を実現する学習過程構成理論を構築することで、数学教育学を、体系としての数学から目標を埋め込んだ人間形成学へ自立させる方途を示す点にある。数学による人間形成を実現するには、数学を活動として教える保証が必要になる。Freudenthal の主張の延長では、数学の価値や数学の生み出し方は、振り返ることを通して、そのよきを感得することを通して学ぶことができる。本書が提出する「数学的活動による学習過程の構成」理論は、数学的活動による学習を実現する教育課程構成のための基礎理論をなす。そのため教材研究論理が「数学化過程の構成原理」である。

本書は、その原理によって数学教育学を人間形成学として自立させるための一つの教材研究論理を提唱する。心理学的関心から観察データを基に論証することだけが学術研究ではない。そのような研究の前提としてさえ教材研究は真っ先に求められる。教育目標を実現するために我々がなすべき教材研究の方法を学術的に議論しえるようにする理論こそが本書が求める数学教育理論である。それは本書内では、van Hiele 理論を本来の立ち位置に戻す議論として話題にされる。例えば、共有された教育課程のなかった米国では、van Hiele の思考水準研究の多く

は、子どもの水準を判定する研究として展開された。その結論は水準は判定不能というものである。それは発達最近接領域で知られるソビエト心理学を背景に生まれた van Hiele 理論からすれば、その本質を見失った議論である。もとより、van Hiele 自身は子どもは自分の発達水準を超えて思考すると主張しており、個別生徒の思考を弁別することは彼の理論の射程外である。水準とは言わば局所的に正しい数学理論である。van Hiele は学習指導を通してそれを再構成し、より高い水準の理論を構成していく幾何入門教程を築く過程で、その水準を定めたのである。そこでは何よりも水準の移行指導を計画することが課題になる。学習過程を構想する教材研究理論、教育課程構成の基礎理論を提出する点にこそ、van Hiele 理論の本質がある。本書は、かような van Hiele 理論の射程を Freudenthal の延長線上で拡張する。

教材研究という語は、教師が各時間の指導過程を構想する際にしばしば用いられる。本書は、教材研究という語の射程を数学的活動によるよりよい学校数学体系の構築、教育課程・教科書開発という範囲にまで拡張することを志向する。教材研究を数学教育研究の中核とみなす本書は、観察科学ではなく、数学的活動の実現を目標にした「よりよい実践の再現可能性」を高める再現科学の意味での授業研究を実現することを志向する<sup>5)</sup>。世界の教育学界における日本の教育学の比較優位は、目標を実現する教材・指導理論を日本の教育学が保有し、その理論を授業研究を通して常に評価し、よりよく再現できるように更新している点にある。目標を実現するための教材研究や授業研究を先導する実践的な教育学理論の創出にこそ日本の比較優位がある<sup>6)</sup>。

残念なことは、「自ら学び自ら考える」、「学び直し」、「統合発展」というような日本の教育課程を語る上で不可欠な用語を安易に英語化した場合、外国の研究者は、時によくわからない宗教とみなすことである。その用語は、国内動向、我が国の教科書や指導法を基盤に理解されてきた。海外で説明する際に、国内では誰もが既知とみなす暗黙の前提が共有されないことが課題である。本書は、理論構成に国際的に共有された Freudenthal の数学化論をはじめとする諸研究を取り上

---

5) Inprasitha, M., Isoda, M., Iverson, P., Yeap, B. (to appear). *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education*. World Scientific; 磯田正美 (2014). 再現科学としての算数・数学教育学の展開。『日本数学教育学会誌』96 (7)。24-27.

6) 例えばオープンアプローチは世界で参照される実践的理論である：Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. Nakahara, T., Koyama, M. edited. *Proceedings of 24th Conference of IGPME*, 1. 23-27.



$x$  はじめに

げている。それは日本の教育課程基準とも整合した国際的に共有性の高い実践的な教育理論の構成に挑むものである。

本書は、早稲田大学教育学研究科に提出した博士学位請求論文「数学教育における数学的活動による学習過程の構成に関する研究：表現世界の再構成過程と関数の水準による Freudenthal 数学化論の拡張」（受理 2012 年 11 月 27 日：博士（教育学）・早稲田大学（第 6151 号））に、「はじめに」と「結びにかえて」を加え出版するものである。「はじめに」は、その冒頭において、博士論文の研究主題をより広い視野から解題するものである。「結びにかえて」は、論文後に、論文作成に至る経過と謝辞を記したものである。特に本文内では、博士請求論文としての研究主題に迫る言及であることを明瞭に保つ必要から、「本書」とすべきところを、あえて原論文のままに「本研究」と記している。

本書は、日本学術振興会平成 26 年度科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果公開促進費（学術図書：課題番号 265224）の出版助成を得て、自然科学書・数学書の老舗共立出版から出版いただくことができました。同編集部の信沢孝一様、赤城圭様が出版助成手続きを支援下さり、大越隆道様が、学術書としての編集を丁寧に進めて下さいました。出版に際して、お礼申し上げます。

2015 年 1 月 磯田正美