

# はじめに

本書は、数学、物理学、あるいは、それらの関連分野を学んだ人のための、具体的なテーマを題材にした数理物理学の教科書である。統計物理学のもとも魅力的な問題ともいえる相転移と臨界現象を題材に、物理的なアイディアと数学的な論理が相互作用しあって、物理の難問を数学的に厳密に解決していく様子をお目にかけたい。幸い、登場する数学の多くは大学一、二年生レベルの微積分である。

本書では、統計力学の知識を前提にせず、必要な概念は定義し、関連する物理的な背景も説明することを心がけた。物理に詳しくない数学畠の読者にも、扱われている問題の重要性・面白さを理解していただければと思う。

証明の技術的な詳細に深入りしたくない読者は、基本的な結果とアイディアを学びながら読み進めることもできると思う。統計力学を一通り学んだ上で、相転移の厳密な理論の発展を知ろうという物理畠の読者にも、厳密な数理物理の醍醐味を味わっていただければと願っている。

様々な背景をもつ読者に、もっとも魅力的な問題の一つを通しての数理物理への入門書として読んでもらえることを目指した。この目標がどこまで達成されているか、読者のご意見とご提案を待つ<sup>1</sup>。

もちろん、相転移と臨界現象は広大な研究分野である。たとえ数学的に厳密な理論が展開されている部分に限っても、一冊の本でその全体像を詳しく伝えるのは不可能だろう。本書では、広い範囲をカバーすることはもとより意図せず、典型的な一つの問題について重要な一連の結果をじっくりと述べることにした。具体的には、Ising 模型という、考えうるもっとも単純な大自由度物理系の理論モ

---

<sup>1</sup> 本書への訂正、加筆、また、本文には収録できなかった詳細についてのノートなどを下記の web ページ（「田崎 原 相転移」で検索すればすぐにみつかるだろう）で公開する予定である。  
<http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/IsingBookJ/>

ルに限定し、相転移の存在、高温・低温での系の特徴づけ、臨界現象の存在、臨界指数の普遍的な関係式などの厳密で普遍的な結果を詳しく解説する<sup>2</sup>。これは、相転移と臨界現象という「自然からの出題」に対して、今のところ、人類が与えることのできるもっとも優れた解答の一つだと思われる。

個別のモデルの解析ではなく、無限自由度系の統計力学の一般論から相転移の問題にエレガントにアプローチできないのだろうかと考える読者もいるかもしれない。しかし、少なくとも今の段階では、相転移や臨界現象の問題について強力な結果を生み出すような完全な一般論は存在しない。ただし、本書でみる Ising 模型における具体的な証明の手法やその背後にある描像を、Ising 模型を越えて、より広い範囲の多体系のモデルにまで一般化することは可能だ。本書で扱う内容を理解することで、そのような一般論のいくつかを自然に学ぶことができるだろう。興味深いことに、これら一般論がカバーするモデルの範囲はかならずしも一致しない。ある一般論は場の量子論の構造と相性がよく、別の一般論は確率論的であり、また別の一般論は確率幾何的な対象に適用される。Ising 模型は、こういった複数の一般論がいずれも適用できる「共通部分」に位置していると言つていいだろう。そういう意味で、Ising 模型という特定のモデルを深く議論することは、既存のいくつかの一般論を理解するための最良の道でもある。

また、本書で紹介する Ising 模型についての様々なアプローチは、

物理的なアイディアを徹底的に洗練させて、数学的に厳密な手法にまで高める

という、数理物理学の一つのあるべき姿の実例にもなっている。もちろん、科学的・数理的な知性にとって、何が「物理的」で何が「数学的」かという確たる区別があるわけではない。理想的には、物理学の問題がひとたび数学的に定式化された後は、「物理的に正しいアイディア」というのは、「数学的に厳密な論法」に直結するものでなくてはならないはずだ。そうはいっても、現実には、多くの場合、理論物理学者の「言語」と数学者の「言語」のあいだにかなり大きなギャップがある。少なくとも、本書で扱う Ising 模型へのアプローチに限れば、これら二つの「言語」が橋渡しされて一つの優れた数理科学を形作っていることを味わっていただきたい。

---

<sup>2</sup> 2 次元 Ising 模型の厳密解に関する研究は本書では扱わない。

相転移と臨界現象をめぐる数理物理は、読者の主要な興味や研究分野とは無関係に、それを学ぶことが純粋な知的な喜びになるようなテーマであると信じている。そしてこのテーマをめぐる優れた研究は、物理学と数学という二つの学問の営みは決して切り離してはいけないことを具体的に力強く示してくれていると思う。

本書を通じて、一人でも多くの読者に、物理学と数学の生きた交流の一つの姿を楽しんでいただければ、われわれにとって大きな喜びである。

本書の内容について本質的な提案をしてくださった楠岡成雄さん、高麗徹さん、坂井哲さん、田中彰則さん、服部哲弥さん、松井卓さん、有益なコメントや議論をしてくださった池田達彦、糸井千岳、大野正雄、長田博文、小田啓太、小野浩太郎、風間英明、神本丈、高麗雄介、作道直幸、関根良紹、千野由喜、辻井正人、廣島文生、森貴司、藪中俊介のみなさん、本書の題材を含む様々な数理物理学の話題とともに学んだ東京工業大学、名古屋大学、九州大学での原研究室の大学院生のみなさん、そして、本書の長い準備期間のあいだにお世話になったすべてのみなさんに感謝します。

2015年2月  
田崎 晴明、原 隆