はじめに

本書のテーマは，さまざまな図形やパターンの対称性を数学的に記述することである．図形の対称性を表すのに，線対称，点対称などの言葉がある．例えば，図形が線対称であることは，その図形が，ある直線に関する対称移動でそれ自身にうつされると言い替えることができる．図形のもつ対称性を正確に記述するために，図形をそれ自身にうつすような合同変換全体のなす群という概念を考える．

対称性を表す合同変換群の考え方は，結晶学とよばれる物質科学の分野でも重要な役割を果たす．本書の主要なテーマである平面結晶群は，原子や分子などの配置によって，2 つの方向の周期性をもつように，平面を埋め尽くすパターンの対称性を表す群ととらえることができる．このようなパターンは，2 つの方向の平行移動で不変になるように，平面を敷き詰める，連続模様に対応していて，全部で 17 種類あることが知られている．17 種類の連続模様は，13 世紀に建設されたスペインのアルハンブラ宮殿の装飾に，すべてのパターンを見いだすことができる．また，古代エジプトでも，17 種類の連続模様が知られていたようである．これらは，群の概念が登場するよりもはるか以前のことである．

群は図形に限らず，さまざまな数学的な事象において，その対称性を記述する，現代の数学の基本概念である．群の概念を初めて正確な形で定式したのは，19 世紀のフランスの数学者ガロアである．ガロアは代数方程式の対称性を表す群の概念を導入することにより，5 次以上の方程式は，一般には，係数の加減乗除と累乗根をとる操作で表す解の公式が存在しないことを示した．この事実はアーベルによっても証明されている．群による対称性の概念は物理学において

も重要な役割を果たす．古典力学は，ガリレイ変換で不変な体系であり，また，特殊相対論は，時空におけるローレンツ変換による不変性によって記述される．

平面結晶群の分類は，群論による代数的な方法でもなされるが，本書では，群作用の軌道空間に注目して，オービフォールドとよばれる幾何学的手法を用いて行う．平面結晶群の分類は，ユークリッド平面をモデルとしてもつ，閉じたオービフォールドの分類に帰着される．オービフォールドの概念はサーストンらによって発展し，現代の幾何学で重要な役割を果たしている．空間結晶群の分類は，19 世紀末に，フェドロフとシェーンフリースによって独立になされた．空間結晶群は 230 通りあることが知られている．これらの 230 種類の空間結晶群の分類は，物質科学でも広く用いられている．

本書では，章末問題のほかに，随所に「課題」として，読者が，実際に連続模様の対称性を考えたり，模型を作ったりする数学的体験として取り組めるような問題を掲載してある．このような課題を実習などの形式で活用していただければ幸いである．

坪井俊さんには，2011 年 9 月に東京大学玉原国際セミナーハウスで開催された高校生数学キャンプ「対称性と周期性」の資料を見せていただき，本書の執筆の参考にさせていただいた．ここに謝意を表したい．また，「結晶群」について執筆する機会を与えていただき，この本の完成に関して大変お世話になった共立出版の編集部の方々に感謝したい．

2015 年 5 月

河野 俊丈