

目 次

第 1 章 図形の対称性	1
1.1 対称性の記述	1
1.2 平面の合同変換	3
1.2.1 合同変換の定義	3
1.2.2 鏡映とその合成	5
1.2.3 複素数平面による表示	7
1.2.4 行列による表示	8
1.2.5 平面の合同変換の分類	11
1.3 合同変換群	13
1.3.1 平面の合同変換がなす群	13
1.3.2 群の定義といくつかの例	15
1.3.3 対称群と交代群	19
1.4 図形の対称性を表す群	22
1.4.1 対称性と合同変換群	22
1.4.2 群の作用	24
1.4.3 部分群による剰余類	26
1.4.4 正多面体群	29
1.5 不連続群と基本領域	34
1.5.1 合同変換群の不連続な作用	34
1.5.2 平行移動からなる不連続群の分類	36

1.5.3	$O(2)$ の離散部分群	41
1.5.4	基本領域	42
第 2 章	平面結晶群	47
2.1	結晶群の概念の定式化	47
2.1.1	連続模様の対称性	47
2.1.2	平面結晶群の定義といくつかの性質	48
2.1.3	正規部分群と半直積	52
2.2	1 次元の場合	54
2.2.1	1 次元結晶群の分類	54
2.2.2	軌道全体の集合	56
2.3	平面結晶群の分類	57
2.3.1	平面結晶群の格子	57
2.3.2	斜交格子の対称性	59
2.3.3	17 種類の平面結晶群のリスト	60
2.4	フリーズ群	67
2.4.1	フリーズ群の分類	67
2.4.2	一方向の連続模様	69
第 3 章	結晶群と幾何構造	72
3.1	不連続群の軌道空間	72
3.1.1	トーラスの局所ユークリッド幾何構造	72
3.1.2	軌道空間の距離空間としての構造	74
3.1.3	局所ユークリッド幾何構造をもつ曲面	77
3.1.4	位相の概念からの準備	81
3.1.5	被覆写像	86
3.2	オービフォールド	88
3.2.1	$O(2)$ の離散部分群による軌道空間	88
3.2.2	オービフォールドの定義	90

3.2.3	分岐被覆	92
3.3	閉曲面の分類とオイラー数	94
3.3.1	曲面の多角形表示	94
3.3.2	2次元射影空間	99
3.3.3	閉曲面のオイラー数	102
3.3.4	連結和	105
3.3.5	オービフォールド・オイラー数	107
3.4	平面結晶群の分類定理の証明	111
3.4.1	タイプ C_n の特異点のみをもつ場合	111
3.4.2	タイプ D_n の特異点をもつ場合	116
3.4.3	フリーズ群の分類定理の証明	122
3.5	幾何構造から見た結晶群	125
3.5.1	位相的オービフォールドの幾何構造	125
3.5.2	測地線と展開写像	126
第4章	空間結晶群	136
4.1	3次元ユークリッド空間の合同変換群	136
4.1.1	$\mathbb{E}^3$ の合同変換	136
4.1.2	3次元空間の結晶群の定義	140
4.2	3次元局所ユークリッド多様体	141
4.2.1	3次元トーラスの局所ユークリッド幾何構造	141
4.2.2	平面結晶群の3次元空間へのリフト	143
4.2.3	ザイフェルトファイバー空間	148
4.3	空間結晶群と3次元オービフォールド	151
4.3.1	球面上の幾何学とシュバルツ3角形群	151
4.3.2	$O(3)$ の離散部分群	154
4.3.3	空間結晶点群	159
4.3.4	3次元ユークリッド型オービフォールド	161
4.3.5	3次元ブラベ格子	165

4.3.6	球の詰め込み	170
4.3.7	空間を充填する多面体	173
 第 5 章 エピローグ		177
5.1	双曲幾何学	177
5.2	4 次元正多胞体	180
5.3	非周期タイルばり	183
 参考文献		187
 索引		189