まえがき

確率の問題は，その背景には考えられないほどの変化もあり，ときには詭弁にまでの広がりを見せるが，まさに誰をも魅了してやまないものである．数学者が愛する理由は，確率論がとても美しく，数学の宝石の 1 つであることである．物理学者が愛する理由は，確率が彼らの技術的な問題の多くを解決する鍵になることが多いことである．そして，確率の問題がとても面白いということからみんなが愛しているのだ．確率の問題は，頭脳を持つ人なら誰でも問題を理解できるように述べることが易しいと同時に，熟達の人でさえ（少なくともしばらくは）途方に暮れるほどに悩ましいのである．

どういうことか，例で説明してみよう．中に 100 個の赤い玉と 100 個の黒い玉の入った壺があるとしよう．それから，1 つずつ，**返却しながら**玉を選ぶ，つまり，玉を選んだあとは玉を壺に戻すことにする．そうすると，

(a) 最初の玉が赤である確率は？　答はもちろん 1/2 である．

(b) 2 つめの玉が赤である確率は？　ふーん，そうだね，今度も答はもちろん 1/2 だ，とあなたは言うだろう．

さて，返却を**しないで**玉を選ぶ，つまり，選んだ玉は戻さずに捨てることにするとしよう．そうすると，

(c) 最初の玉が赤である確率は？　いやまったく，うんざりするね，とあなたは言うだろう．選んだあとでは最初の玉には何の関係もないんだから，

明らかに答は 1/2 のままだよ．

(d) 2 つめの玉が赤である確率は？ オーケー，やっと当たり前でない問題になったか，とあなたは叫ぶだろう．**今度は**，ときっとあなたは言うだろう．答は最初の玉が何であるかによる．というのは，最初の玉が赤なら，2 回目に引くとき，壺の中には赤い玉は 99 個になってるけど，最初が黒い玉なら，赤い玉が 100 個残っているが，黒い玉は 99 個しかない．これは最初の問題よりもかなり複雑だが，**条件付き**確率というものを使うと，次のように書くことが**できる**[1]．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(2\text{ つめの玉が赤})\\
&\quad = \mathrm{Prob}(\text{最初が赤い玉のときに第 2 の玉が赤}) \times \mathrm{Prob}(\text{最初の玉が赤})\\
&\quad\quad + \mathrm{Prob}(\text{最初が黒い玉のときに第 2 の玉が赤}) \times \mathrm{Prob}(\text{最初の玉が黒})\\
&\quad = (99/199)(100/200) + (100/199)(100/200)\\
&\quad = (100/200)(99/199 + 100/199) = (100/200)(199/199) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

さて，この 1/2 の**ままだ**という結果にあなたは驚いただろうか．実のところ，数十年もこの例を講義で話しているのだが，今でも私は戸惑いを隠せないでいる．

では，次の驚きに満ちた結果はどうだろう．百万人の男が帽子を 1 つの非常に大きな箱に入れる．どの帽子にも持ち主の名前が書かれている．箱をよく揺すったあとで，一人ずつ箱から無差別に 1 つの帽子を取り出すとする．少なくとも一人の男が自分の帽子を取り戻す確率はどうなるだろうか？ ほとんどの人は「とても小さい」と答えるだろうが，実際には驚くほど大きくて 0.632 なのである！ こんなことを誰が思いつくだろう？

確率には，通常のタイプの範囲外の技術の解説者に提供できることが多い．例えば，新しい法律の社会的関わり合いの学生には，未来に起こるかもしれないことを探るために偶然の数学が使えることが多い．この主張は少々あいまいに見えるかもしれないので，私が言いたいことのはっきりわかる例を挙げてみたい．就労証明書のない移民に関する話題がアメリカでは何年も沸き立ってきており，2012 年の大統領選挙年の激しい政治的な論争において脚光を浴びてきた．警察官がどんな人でもどんなときにでも呼び止めて，市民権

[1]［訳註］確率は英語で probabiliy と言い，その最初の 4 文字で確率を表す関数と考えている．

身分証明書を見せるよう要求できるようにする法律が提案された．そのような法律で抱えるかも知れないさまざまな問題は確かにあるが，特にどんなに脅かすものになるかという 1 点に集中しよう．つまり，そのような法律ができるとどんなに不自由になるかということである．次のようにして，この問題を伝統的な確率の問題としてモデル化することができる．

アメリカが巨大な壺であり，その住民が玉であると考える．正規の住民を b 個の黒い玉とし，就労証明書のない住民を r 個の赤い玉と考えるのである．警察が呼び止めるのは壺から無作為に玉を取り出すことにあたる.（正規の）黒い玉は壺に戻され,（証明書のない）赤い玉は常に取り除かれる（強制退去させられる）．そうするとこの不自由さの問題は，こういうことになる．つまり，赤い玉（証明書のない住民）が 50%排除されるまでに，平均して何回，それぞれの黒い玉が取られる（正規の住民が警察に呼び止められる）かということである．そして，90%ならどうか，95%ならどうか，ということである．もし，この問題に答えることができるなら（本書の中で答えることになるが），その具体的な数値は実際には大切な点ではない．大切なのは，確率論的解析は議論すべき数を与えてくれるのであって，互いに石を投げ合うような各陣営の提唱者を感情的に非難する言葉ではないという点なのである．

私はほぼ 30 年近く（ニュー・ハンプシャー大学とヴァージニア大学の）電気工学の学部生と大学院生に確率論とその応用を教えてきた．心から希望していることだが，引退したあとに，尋ねられたら,「そう，ときどきだけどね，ナーイン教授に教えてもらったことが役に立ったと気がつくことがあるよ」と答えてくれるような学生が何人かでもいてくれてほしいものだ．しかしもちろん，学習のプロセスは一方通行のプロセスではない．誠実な教師なら誰もが認めるように，学校で新しいことを学ぶのは学生だけではなく，私も例外ではない．数学を講義し黒板にチョークで書いてきたこの 30 年間に私が学んだ重要な 2 つのことは次の通りである．

(1) 「明らか」な結果は退屈である．学生が興味を持つ（また注意を払ってくれる）のは直感的でなかったり驚くような（「見た目では不可能」に見える）結果が出てくる計算である．
(2) 理論的な証明は素晴らしいし実際に望むべきことなのだが，学生は本来的に懐疑的である．彼らは次のように質問したがる.「だけど，見逃して

るものや，微細な推論の間違いが何かないかということをどうやって確かめることができるのですか？」と訊きたがるのである．

確率論とその応用に関する現代的な書物の中にもこの 2 つの場合の例が数多く見つかる．例えば場合 (1) の説明としては，有名な誕生日問題が，大学の図書館の書棚から無作為に取り出した学部生向けの確率の本に出てくることは，ほぼ確実なことである．この問題を述べるのは簡単である．誕生日が 1 年のすべての日にわたって一様に分布していると仮定する．そのとき，もし学生が，少なくとも 0.5 の確率で，2 人（以上）の誕生日（月と日も）が同じになるには何人の人いればいいかと尋ねられたとすれば，ほとんどの人は 183（365 の半分を超える最初の整数）のような「大きな」数と答えるだろう．文字通り**あらゆる**人が，実際の値が余りにも小さいこと（ほんの 23 である）に驚くのである．もし確率を 0.99 まで上げたとしても必要な人数は 55 に増えるだけで，やはり驚くほど小さな値である．誕生日問題を少しひねって，同じように驚くような答になる問題に，少なくとも 1/2 の確率で**あなたの**誕生日と同じ人がいるためには何人いなければいけないかというものがある．今度の答は大きい，実に 183 より大きいのである（253 である）．

私は大勢の（およそ 40 人から 50 人の）入門的な講義で最初の誕生日問題を，一人ずつ自分の誕生日を大声で言わせるという仕方で，よく使ったものである．そうすると，ほとんど常に（しばしば非常に早く）一致することになったとき，教室中で驚きに息を飲む音がして，みんな非常に喜んだものである．(3 重に一致するときもあった！）そのような面白い結果を実際に計算できるという可能性に学生たちは魅了されて，そのあと，講義で私が話すことにより注意を払うようになった．少なくともその講義の終わりまではだけれど！　だから，2 つの誕生日問題は，確率論のどんな初級コースに入れてもいいような申し分なく偉大な問題である．しかし，そのことがまさに今ここでそれを解析しないでおく理由なのである．本書に入り込んでいくには，場合 (1) の問題は驚くべきことであると同時に知られていないでいるものであるべきである．このために，π の値を「実験的に」決定する素敵なビュフォンの針の問題もここでは扱わないことにする．

いくつかの点で，本書は 1965 年に出版された古典である『確率における 50 の挑戦的問題』に似ている．著者は引退したハーヴァード大学の数学者フ

レデリック・モステラーである．その登場から半世紀近くが経って，この本の中の問題のほとんどが教科書の定番になってきた．それらの問題はすべて偉大であるが，もはや「珍しく風変わりでも奇妙でも」なくなった．たとえば，前に述べた「箱の中の百万の帽子」のパズルはモステラーの本の中で論じられているが，彼が書いた時でさえ，この問題は既に何世紀も昔のものであり，1700 年初頭に遡るものだった．

既にこのまえがきの中で 2 回，壺の中の玉のイメージを使ったが，このまえがきを読み終わるまで頭を悩ますようなもう 1 つの壺の中の玉パズルの形をした面白い例がある．本当に見事な例と思う．答は最後に与える．2 つの壺の中に好きなように振り分けることができる 10 個の白玉と 10 個の黒玉があるとする．そのようにした後，友人に公平なコインを与え，友人が無作為に（コイン投げして裏なら一方の壺，表ならもう一方の壺というように）壺を選ぶ．その壺から無作為に玉を 1 つ取り出す．友人が白玉を取り出す確率を最大にするには，玉をどのように振り分けるべきか？　たとえば，1 つの壺にすべての白玉を入れ，他方の壺にすべての黒玉を入れれば，白玉を取る確率は $1/2(10/10) + 1/2(0/10) = 1/2$ である．一方で，それぞれの壺に 5 つの白玉と 5 つの黒玉を入れても，白玉を取る確率が 1/2 のままである．$1/2(5/10) + 1/2(5/10) = 1/2$ となるからである．しかし，振り分け方を変えるとこれよりもずっと良くすることができるし，どれほど良くすることができるかに驚くだろうと思う．そして，この答を知った後でなら，友人が白玉を得る確率を**最小に**する玉の振り分け方がわかるだろうか？

もう 1 つ驚くような答の確率の難問がある．それには数学が不必要で，論理的な推論だけでいいという点で 2 重の驚きである．空港に飛行機に搭乗するのを待つ人が 100 人いるとする．すべての人が席が指定された搭乗券を持っている．満席で，飛行機の座席の数はきっちり 100 である．最初に乗り込んだのが規範に捕らわれない人で単に無作為に席に座ってしまった．実際にはそれが指定された座席**である**かもしれないが，そうだとしても偶然に過ぎない．しかし，その後は，搭乗するほかの人はすべて，一人ずつ順にそれぞれが，指定座席に既に人が座っていない限り，自分の指定座席に座るという決まりに従うこととする．指定座席がふさがっているときは単に無作為に空いている座席に座るとする．最後の搭乗者がそれでも自分の指定座席に座れる確率はいくつか？　答はこのまえがきの最後にある．

驚くようなと考えているものに，膨大な計算の果てにたどりつくような「驚きの」結果は含まれていない．このおそらく奇妙に思われるコメントで私が言いたかったことを 2 つの例で説明しておこう．最初の例として，有名な（数学者によっては**名うての**という言葉に取り替えたいだろう）パズラーであるマリリン・ヴォス・サヴァントが，2011 年 7 月 31 日発行の雑誌『パレード』の中の「マリリンに訊け」というコラムにおいて，読者に次の確率問題を出したことを挙げる．

> 例えば,（公平な）サイコロを 20 回振ることにする．次のどちらの結果が出やすいだろうか？
>
> (a) 11111111111111111111
>
> (b) 66234441536125563152

ヴォス・サヴァントの答は次の通りである．

> 理論的には，どちらの結果の出やすさも同じである．どちらでも，サイコロを振るごとに出ないといけない数が特定されている.（1 から 6 までの）数はそれぞれ同じ確率（つまり 1/6）で上を向く．しかし，あなたが私には見えないところでサイコロを投げ，その結果が上のうちの 1 つであったと言ったとする．どちらの数列があなたが投げたものであるらしいだろうか？　既にサイコロが投げられた後なのだから，答は (b) である．サイコロを転がしたら，1 ばかりが並ぶより，いろんな数が混ざる方がずっとありそうに思われる．

元の問題に対するヴォス・サヴァントの答は正しいか？　派生した問題に対するヴォス・サヴァントの答は正しいか？　しばらくこれを考えてほしい．少し後で，正しい推論を述べることにする．

ヴォス・サヴァントの 2 つ目の本当に悪い数学的推論の例として，雑誌『パレード』の 2011 年のクリスマスのコラムをあげる．そこには，読者からの次の手紙が書かれている．

> 私は，雇用者 400 人の組織に対する薬物検査計画の管理をしています．3ヶ月ごとに，乱数発生器で検査対象の 100 人を選びます．その後で，こ

> れらの人名を選択のプールに戻します．明らかに，ある雇用者が 1 四半期に選ばれる確率は 25 パーセントです．
>
> しかし，1 年を通してみて，選ばれる公算はどれだけでしょうか？

マリリンの答は次の通り．

> 繰り返し検査するとしても確率は 25 パーセントのままです．検査の数が増えていくにつれて検査される公算が大きくなるように思うかもしれませんが，プールの大きさが同じである限り確率も同じです．あなたの直感に反してるんじゃないのかな？

そう，確かに反している．多分彼女のコメントがあまりに驚くほどに間違っているから．実際，息をのむほどに間違っている．もう一度，読者は彼女の寄稿者の質問を考えてほしい．少し後で，正しい解答を述べることにする．

さて，前に述べた場合 (2) はどうだろうか？　教えるときにしたり，プリンストン大学出版局から出版した以前の 2 冊の確率の本（『ちょっと手ごわい確率パズル』[2)] と『デジタルなサイコロ』[3)]）で行ったことは，理論的な結果を確かめるためにコンピュータ・シミュレーションを使うことである．確率過程のコンピュータ・シミュレーションが（満足できる程度に）理論的結果と一致すれば，両方のアプローチに対する確信が強まると考える．そのような一致が起こったからといってもちろん，どちらかの結果が正しいことが示せるわけではないが，その代わりに顕著な一致が起こっているとは信じないわけにはいかないだろう．

だから本書においてコンピュータ・シミュレーションが大きな役割を果たすが，本書は解析に関する本であって，プログラミングの本ではないということを強調しておきたい．MATLAB® を使っているが，私が書いたすべてのコンピュータのコードは低レベルのものなので，あなたのお好みのどんな言語に翻訳するのも難しくないだろう．MATLAB® に熟練している人は，私がこの言語の強力な *vector/matrix* 構造の有利さを回避していることで苦虫を

---

2) ［訳註］原著は *Duelling Idiots and Other Probability Puzzlers*（決闘する馬鹿者とその他の確率パズル）と言い，プリンストン大学出版会から 2000 年に出版されているもので，松浦俊輔による日本語訳が『ちょっと手ごわい確率パズル』という題で青土社から出版されている．

3) ［訳註］原著は *Digital Dice* というタイトルだが，まだ日本語訳は出版されていないので，本書の中で引用されるページは英語版のものである．

潰すかもしれない．その構造は実際に，*for* ループや *if*/*else* や *while* ループを使って行えることに比べると，計算時間を劇的に減少させることができる．しかし，私はそのようなループを大量に使ったが，それはまさに本書のコードを MATLAB® 限定のコードにしたくなかったからである．

もちろんすべてのモンテカルロのコードは乱数発生器（発生器と言うときはいつでも 0 から 1 までに一様に広がった分布を持つ数を返すものとする）というどんな現代的な科学プログラミングにもある特徴的なプログラムを使っているし，MATLAB® も例外ではない．乱数発生器が実際にどのような働きをするかについてさらに知りたければ，実際には使うために知っていることが必要なことではないのだが,『ちょっと手ごわい確率パズル』（175–197 ページ）[4)] を参照してほしい．本書の最後にも役に立つ簡単な技術的注意がある．

さまざまな言語で実現するために数十年の間コンピュータのコードを書いてきた後で，コンピュータ・シミュレーションをしているうちに気付いた興味深い特徴がある．理論的に行うことが難しい問題で必要なものがほんの易しいシミュレーションのことがあるし，逆もまた正しい．つまり，理論的に解析するのが易しい問題には複雑なシミュレーションが必要になることがある．序章に，理論的な導出を確認するためにコンピュータ・シミュレーションを使う例と，コンピュータ・シミュレーションを書くことが非常に難しいと私が思った（書いてみようとも思わなかったが，止めなさいという気もない）面白い問題（最近まで未解決だった）がある．

本書の残りの部分では，あなたが過去に確率の議論に何かしら出会っていると仮定する．しかし，必ずしも最近そういうことをしたことは仮定しない！

たとえば，2 項係数を定義することや，条件付き確率からベイズの定理を導くことや，可能な値として非負整数をとる離散確率変数 X の期待値をなぜ

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \, \mathrm{Prob}(X = j)$$

によって与えるのかについて，詳細に説明することはしないことにする．

一方で，議論が連続な確率変数 X と Y に対して，同時確率密度 $f_{X,Y}(x, y)$

---

4) ［訳註］訳書では 231 ページに若干の説明があるが，BASIC がわかれば，容易に理解できると思われる．

と同時分布関数 $F_{X,Y}(x,y)$ の概念を含むとき，

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

であることは思い出してもらうことにする．あなたが既に知っていると仮定することとあなたが覚えている必要があることは私の方で推測することで，できることは推測が間違うよりも合っていることの方が多いと願うことだけである．どのみち，私の推測が間違っているところでは，あなたの方で調べることができると仮定しているわけである．

さて，マリリン・ヴォス・サヴァントによって提案されたサイコロを転がす問題はどうだろうか？　実際，ヴォス・サヴァントは最初の答は正しかったが，2 つ目の答は間違っていた．両方の列は同等に確からしい．私は最終的に，雑誌『パレード』の 2011 年 10 月 23 日号に載った彼女の続報のコラムを読んで，彼女の混乱の原因が理解できた．そのコラムの中で，ヴォス・サヴァントが間違っていると正しくも主張している読者からの手紙を載せている．ヴォス・サヴァントは自分が正しいと主張し続けているが，無意味なことであり，ほとんど支離滅裂な弁明である．あるとき，彼女は実際に，一度は，20 回サイコロを転がし，そしてごた混ぜの数の列が得られたので，彼女が正しいことが示されたと論じている．彼女の最後の文章が，私にとって，どこで彼女がつまずいたかに対する鍵になった．サイコロを 20 回転がして得られたのは「ずっともっともらしい結果である……ごたまぜの数であった」と彼女は述べている．

そしてもちろん，起こるのはたくさんのごたまぜの列であって，すべてが 1 のただ 1 つの列ではないのだから，それは正しい．しかし，それは元の問題ではないのだから，まったく的外れなのである．元の問題は，20 個の 1 が並ぶ数列の確率と，**1 つの特定の**ごたまぜの数列，例えば，66234441536125563152 の確率を比べるということであった[5)]．「彼女の見えないところで」サイコロを転がすのは単に関係のないことである．元の 7 月 31 日のコラムでの彼女のコメントを読み返したあと，彼女が既に「入り混じった数の集まり」の議論をしていることに気づいた．問題を提出し，解答を求め，そしてそれから**別**

[5)] ［訳註］元の問題は特定の 2 つの 20 桁の数字列を比べる問題だったのに，彼女が後で答えているのは「整然とした数列」と「ごたまぜの数列」という 2 つの集合の比較をしたことになっている．「整然とした」と感じられる数列より，「ごたまぜ」と感じられる数列の方が集合として大きい．問題がすり替わっているという自覚がないので，間違えているという自覚が生まれない．

の問題に正しく答えるときに，ほかの誰であっても元の問題について間違っていると主張する権利があなたにあるわけではないのだ．

ヴォス・サヴァントの薬物検査の問題はどうだろうか？　時間の無駄になるだろうとは思ったけれど，雑誌『パレード』を通して次の e メールを彼女に送らないではいられなかった．

> 親愛なるマリリン
>
> もし四半期ごとの薬物検査に選ばれる確率が 0.25 であるなら，選ばれない確率は 0.75 である．こうして 4 回連続して（四半期で 1 年だから）選ばれない確率は $(0.75)^4 = 0.3164$ である．
>
> つまり，少なくとも一度選ばれる確率は $1 - 0.3164 = 0.6836$ で，あなたの述べた 0.25 ではない．
>
> よろしく．ポールより
>
> ポール・J・ナーイン
>
> ニュー・ハンプシャー大学電気工学名誉教授

驚くことではないが，一通も返事を受け取っていない．しかし 2012 年 1 月 22 日のコラムで彼女はついに自分の間違いを認め,「私のニューロンはうたた寝をしていたに違いない」と書いている．そのあとで少しごまかしのようなコメントが続くが，そこで彼女は与えられたどんな四半期の検査でも選ばれる確率は一定であると考えていたということが言いたいらしいのだが，なぜ「直感に反してるのじゃないのかな？」ということになるのだろうか．実際，この自明な説明は元の答を書いていたときに彼女が考えていたことでないのははっきりしている．

このことはすべて，確率の問題が絡むと,「最高記録の IQ」の持ち主でさえナンセンスのタール坑に頭から落ち込むことがあり得るということを示している．サイコロを投げるという初歩的な問題であってもであり，それがかえって払うべき配慮の価値と重要性を示してくれるのである．序章で，アイザック・ニュートンのような超天才であっても，サイコロを含む確率問題でどのようにつまづくのかを見ることになる．ヴィクトリア女王時代の大数学者オーガスタス・ド・モルガン (1806–1871) がかつて書いたように,「誰もが確率ではときには間違う，しかも大きな間違いをする.」

ド・モルガンが陥ったかもしれないつまづきの 1 つを，同郷の仲間であるアイザック・トドハンター (1820–1884) がその古典というべき著『確率論史』において述べている．そこで，コイン投げ問題を解析する際にフランスの数学者ジャン・ル・ロン・ダランベール (1717–1783) による間違った推論を論評して，トドハンターは「大数学者が問題の間違った側に立ってしてしまうようなことを何でも見てみたいと思う人はダランベールの 1754 年の小論を調べてみるとよい」と書いている．だから，数学者であっても間違った計算をするのである（ダランベールの失策についての議論は第 24 章を参照のこと）．しかしながら，ド・モルガンとトドハンターの霊がヴォス・サヴァントの受賞ものの失策を飲み込むのは大変に難しいだろうと，私は思う．

問題の性質に関する最終的なコメントは本書の中で見つかるだろう．僅かな例外を除いて，それらは，誕生日問題のような，単なる「パーティのためのお楽しみパズル」ではない．難しさのレベルにはかなり大きな広がりがある．高校の代数くらいのものの直接的な応用である（が，驚きの結論の）ものもあるし，過度に劇的な結論ではないが，数学的に非常に込み入ったものもある．この後の方の問題はより適切に「なし得ることの刃のパズル」と考えられている．思うのだが，それが特別な魅力であり，大学の数学の限界線の間際に迫る，ぎりぎりの複雑さを持っていると言える．ところで，本書がみな生真面目なお勉強であると思われないように，パズルのうち少しは，おそらくどちらかと言えば，特に過去のマリリン・ヴォス・サヴァントのコラム（読者に挑戦しているのに，私の知る限り，彼女が答えることのなかったパズル問題）からとった，箱の中の鶏に関する第 24 章の問題より，パーティ風のものになっている．だから，パーティによく出かける人と熱心に分析する人のどちらの人もが以下のページの中の問題を刺激的に思ってもらえるのではないかと思う．

玉の分布問題の解答

b 個の黒玉と w 個の白玉を 1 つの壺に入れ，残りの $10-b$ 個の黒玉と $10-w$ 個の白玉をもう 1 つの壺に入れる．（公平なサイコロを使って）無作為に選ば

れた壺から白玉を取り出す確率は

$$\left(\frac{w}{w+b}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{10-w}{20-w-b}\right)\frac{1}{2}$$

となる．すべてを手で確かめるとなると苦痛なほど多くの可能性があるが，コンピュータのコードなら朝飯前である．私がやったのはそれであって，w と b のすべての可能性，つまりそれぞれを独立に 0 から 10 まで（全部で 121 の組合せがあるだけ）走らせると，コードは $b=0$ かつ $w=1$ のときに最大確率が起こることを教えてくれる．つまり，1 つの壺には白玉が 1 つ入っているだけで，他方の壺には 10 個すべての黒玉と残りの 9 個の白玉が入っている．このとき，白玉を引く確率は

$$(1)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{19}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{14}{19}=0.7368 \tag{1}$$

となり，0.5 よりかなり大きな値となる．白玉を引く確率を最小にすることは黒玉を引く確率を最大にすることと同値であることに注意しよう．元の問題との対称性から，$b=1$ かつ $w=0$ が黒玉を引く確率を最大にする分布であることがわかる（もちろんその確率はまたも 14/19 である）．しかし，そのことから，白玉を引く確率は $1-14/19=5/19=0.2632$ となることになる．

飛行機の座席問題の解答

答は 1/2 であるが，それは単に 100 人に対してだけでなく何人に対してもそうなる．この問題を理解する鍵は，最後の搭乗者が飛行機の 100（数が何であっても）の座席のうち任意の座席に座って終わりになるわけではないということを認識することである．そうではなく，彼が座るのは自分の指定座席か最初の搭乗者の指定座席かになるのである．この主張を聞くと，最初ほとんどの人は驚くのだが，仕組みはこうである．もし最初の搭乗者が（たまたま）自分の指定座席をとったなら，最後の搭乗者は確実に自分の指定座席に座れる．なぜなら，ほかのすべての人は（規則に従い）自分の指定座席に行くからである．一方もし，最初の搭乗者が例えば座席 10 をとったとすれば，座席 2 から 9 まで指定されている続く搭乗者は自分の座席に行くことになる[6]．その次の 10 番目の人には 3 つの可能性がある．(1) 彼が最後の人の

[6] ［訳註］記述を簡単にするために，搭乗者に順に番号をつけ，その人の指定座席に同じ番号がついていると思っている．

座席をとるか，(2) 最初の人の座席をとるか，(3) まだ空いているほかの席をとるかである．もし彼が最初の人の席をとれば，ほかのすべての人は（最後の人も含めて）自分の指定座席をとることになる．もし彼が最後の人の席をとれば，最後の人以外のほかのすべての人は自分の指定座席をとり，最後の人はただひとつ残った座席である最初の人の指定座席をとることになる．最後に，ほかの座席をとったとする．例えば 27 の座席だとすると，11 から 26 までの人には同じ状況が起きて（単に自分の指定座席に行き），27 番目の人は 10 番目の人と同じ役割を果たすことになる．最終結果は，最後の搭乗者が自分の指定座席を得るか，最初の人の指定座席を得るかのどちらかで終わることになる．搭乗する人が指定座席が占拠されているためにその席をとれないことが起こるたびに，最初の人と最後の人の指定座席を含む残りのすべての座席の中から無作為に選ぶことになる．だから，いつでも，この特別な 2 つの座席を区別するものは何もなく，それらが最後の搭乗者の座席になる確率は同じである．そして，最後の搭乗者にとってその 2 つだけが座る可能性のある座席なので，それぞれの確率は 1/2 となる．