はじめに

ハミルトン系のカオスの研究は19世紀末のH.ポアンカレに始まる．彼は三体問題の研究中に，不安定な周期解から出る安定多様体と不安定多様体が当初の予想と違って，横断的に交わることを発見してしまった．このことから，ポアンカレは三体問題の相空間が無限に細かい，しかも複雑な構造をもつことを見た．1960年代に，S.スメールはこの横断的交わりを実現するきわめて簡単な幾何学的モデルを創案した．それが今日のいわゆるスメール馬蹄である．相空間を引き伸ばして折りたたむ．これの繰り返し．これがスメール馬蹄で生じる運動である．これで力学系に対照的な二つの系が揃った．一つは二体問題に代表される完全可積分系．この系では，すべての運動が規則的である．もう一方の極端は，スメール馬蹄系．この系には，コイン投げで出現するあらゆる時系列に相当する運動が可能である．本書では，スメール馬蹄を相空間の一部に含む系をカオス系とよぶ．

上の説明を読むと，完全可積分系とカオス系はかなり離れていて，その中間に，可積分でもカオスでもない系があるように思えてしまう．実は，可積分系はカオス系と隣り合っている，あるいは，可積分系はカオス系にとり囲まれている．これは次のような事情によるのである．

写像の場合で考える．スメール馬蹄系では1回の写像で1回の引き伸ばしと折りたたみが行なわれる．写像2回ごとに1回の引き伸ばしと折りたたみが行なわれる系がある．写像3回ごとに1回の引き伸ばしと折りたたみが行なわれる系がある．以下同様．写像n回 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ごとに1回の引き伸ばしと折りたたみが行なわれる系がある．この系をn次のスメール馬蹄（系）とよぼう．$n = 1$の場合がもともとのスメール馬蹄である．nが2以上の馬蹄

を高次のスメール馬蹄とよぶ．さて $n \to \infty$ を考えると，何回写像を繰り返しても引き伸ばしと折りたたみが生じない．これは可積分系である．

可積分系と高次のスメール馬蹄を含む系の関係を調べよう．そのために，写像の集合を考える．集合の要素一つ一つが写像である．集合内に距離も定義する．得られた写像空間 $\mathcal{X}$ の中で，n 次のスメール馬蹄を含む写像の集合を $\mathcal{F}_n$ と書く．すると，n 次以下のスメール馬蹄を含む写像の集合 $\cup_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ は n とともに大きくなる．$\mathcal{G}_n = \mathcal{X} - \cup_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ と書くとこちらは単調減少集合であって，$\mathcal{G}_\infty$ は可積分系である．十分大きな n に対して $\mathcal{G}_n$ は $\mathcal{G}_\infty$ を含み，かつとり囲む．$\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_\infty$ は高次とはいえ，スメール馬蹄を含むのでカオス系である．以上で，可積分系がカオス系に囲まれていることがわかった．可積分でなくなった途端に，弱いとはいえ，カオス系になってしまう．

以上のことからすると，写像空間の中で，可積分系を出発点として 1 次のスメール馬蹄を含む系まで線を引き，その線上の各力学系を調べればカオスが強くなっていく仕方の基本的なことがわかる．だが，どうやって何を調べるか．それが問題だ．

系のカオスを調べるために，周期軌道の探索が有望な戦略であることを説明しよう．不安定周期軌道の安定多様体と不安定多様体が交わると，相空間の引き伸ばしと折りたたみ生じる．だから安定多様体と不安定多様体のふるまいを調べればよい．だが，この多様体は周期解を出てから複雑に動くので，互いの交わりが生じる場所を見つけにくい．ところで，相空間を引き伸ばして折りたたむと，引き伸ばし作用によっていったんは遠くに行くが，折りたたみ作用によってもとの場所の近くに戻ってくる点がある．場合によっては，正確にもとの場所に戻ることがある．この場合，周期軌道となる．このことから，カオスの強弱と周期軌道の周期の間に関係があることがわかる．すなわち，n 回の写像ごとに 1 回の引き伸ばしと折りたたみが生じる系では，周期解の周期は n かそれ以上である．カオスが弱ければ n は大きいから，カオスの弱い系に存在する周期解の周期は長く，カオスが強くなると，周期解の周期は短い．シャルコフスキーの定理（第 7 章，7.3 節参照）を彷彿とさせる性質である．位相的エントロピーという量を計算すると（6.1 節），力学系の複雑度，あるいはカオス度が測れる．幸いなことに，周期を増やしたときの

周期解の数の指数関数的増大率がわかると，力学系の位相的エントロピーの値を見積もることができる．もっとうれしいことに，ある種の周期軌道が存在すると，そのことだけで，力学系の位相的エントロピーを見積もることができる（6.2 節）．

スメール馬蹄の性質を明らかにしておくことはカオスの理解に必要である．まずスメール馬蹄を記述することから始める（2.1 節）．スメール馬蹄では，軌道は 0 と 1 の記号列で表わされる．逆に，0 と 1 で作られるどんな記号列にも軌道が対応する（2.2 節）．軌道は「記号平面」の点列として表現できる（2.4 節）．本書ではまず周期軌道に着目する．周期軌道の記号列は 0 と 1 の有限個の並び（コード）の無限の繰り返しからなる．コードが決まると軌道点が記号平面のどこにあるのかがわかる．そこで，次のような疑問に本書では答えるつもりである．簡単のため 5 周期のコード 01101 と 00101 を挙げて疑問を具体的に書く．

疑問 1：コード 01101 の周期軌道とコード 00101 の周期軌道の相違は何か．

疑問 2：コードに対応する周期軌道はどのようにして生じたのか．

スメール馬蹄の世界にいるかぎり疑問 1 にも疑問 2 にも答えることができない．コード 01101 と 00101 の周期軌道が存在することはわかるが，それ以上の情報は得られないのである．このような意味ではスメールの馬蹄世界は無味乾燥な世界である．

馬蹄世界を記述する記号平面に，何か力学的もしくは物理的に意味のある実体を持ち込むことを考えよう．ダリン・ミース・スターリングは時間反転対称性をもつ力学系を扱った．すなわち，可逆性を有する馬蹄に対象を制限したのである．これによって記号平面に対称線を描くことができ，記号平面の運動が非常に見やすくなった．本書では対称性をもつ系に共鳴領域および共鳴鎖を導入する（第 4 章）．記号平面が相平面の世界とよく似た構造をもつことがわかる．また，相平面では描けない運動を記号平面では簡単に描ける．記号平面で描いた運動を見て相平面の運動を想像できるようになった．この結果，今まで知られていた現象に対して新しい解釈を与えることができたり，新しい現象を見つけることができる．

カオス研究を山登りに例えてみよう．スメールの馬蹄世界は山の頂上である．標高は位相的エントロピーで測る．単調に標高を上げていくように登山道を作りたい．どのような方法で裾野から道を造り頂上に向かえばよいのだろうか．そのためには出発する完全可積分系を決めておく必要がある．本書は完全可積分系として等速並進運動系を採用し，それをスメール馬蹄とつなげる連結写像族を構成する．

以上を踏まえて本書の研究方法について述べよう．方法は二つある．

方法 1：周期軌道の出現の仕方を明らかにする．周期軌道のコードのもつ情報から位相的エントロピーを見積もる．

方法 2：ホモクリニック軌道の出現の仕方を明らかにする．ホモクリニック軌道の性質から位相的エントロピーを見積もる．

方法 1 でも方法 2 でも，裾野から頂上に向けて登山道を作る．道を作るために必要な，軌道の順序保存性という概念を導入する (2.6 節)．普遍被覆面において軌道の順序保存性は次のように記述できる．普遍被覆面上の写像を T とし，普遍被覆面上の任意の 2 点を r と s とする．また $\pi_x(r) < \pi_x(s)$ が成立しているとする．ここで $\pi_x(r)$ は r の x 座標値を表す．このとき $\pi_x(Tr) < \pi_x(Ts)$ が成り立つなら，軌道は順序保存性を有するという．順序保存性は周期軌道にもホモクリニック軌道にも適用できる．

順序保存性を満たす周期軌道をバーコフ型周期軌道とよぶ．周期軌道が上記の条件を破る r と s をもつ場合，この周期軌道を非バーコフ型周期軌道とよぶ．バーコフ型周期軌道から見積もると，系の位相的エントロピーは 0 である．一方，非バーコフ型周期軌道から見積もると，位相的エントロピーは正である．このことから方法 1 における登山道作りは，非バーコフ型周期軌道に関する順序関係を明らかにしていく作業になる (第 7 章)．ただ非バーコフ型周期軌道だけで閉じた順序関係にならない．非バーコフ型周期軌道の極限にホモクリニック軌道が現れるのである．

方法 2 では，まずホモクリニック軌道を主ホモクリニック軌道と 2 次のホモクリニック軌道に分ける．主ホモクリニック軌道は順序保存であり．2 次のホモクリニック軌道は順序保存でない．だから主ホモクリニック軌道から

求めた位相的エントロピーは 0 である．2 次のホモクリニック軌道から正の位相的エントロピーが得られるので，これらの間の出現順序関係を明らかすることが方法 2 の主たる作業となる．

非バーコフ型周期軌道の極限にホモクリニック軌道が現れることより，方法 1 と方法 2 は合体し，裾野から頂上へ向かう登山道作りは一本化する．これは 1 次元写像の場合のシャルコフスキー順序関係の構成に相当する．本書ですべき仕事は次のように一文で書ける．「完全可積分系からスメールの馬蹄までを記述する順序関係を構成せよ．」ただし，この順序関係は非バーコフ型周期軌道とホモクリニック軌道を含む順序関係である．場合によっては，順序関係にヘテロクリニック軌道も含む．

本書の写像とエノン写像でできる登山道について簡単に触れておく．エノンは完全可積分系として等速回転運動系を採用し，それをスメール馬蹄とつなげるエノン写像族を構成した．出発点が違うので，登山道の出発部分は異なるように思われる．ところが登山道は一致するのである．よって，本書で造った登山道を理解しておけば等速回転運動系を完全可積分系とする登山道も理解できることになる．どちらも位相的エントロピー 0 の完全可積分系と位相的エントロピー $\ln 2$ の馬蹄世界をつなぐ写像族であることに変わりはない．

第 1 章から第 5 章まででスメールの馬蹄の構成から本書で利用するさまざまな数学的道具について説明する．第 6 章では位相的エントロピーについて説明し，位相的エントロピーを求める代表的な方法を二つ紹介する．第 7 章では方法 1 による登山道作りを紹介し，第 8 章では方法 2 による登山道作りを紹介する．第 8 章の最後に，非バーコフ型周期軌道とホモクリニック軌道そしてヘテロクリニック軌道を共に含む順序関係を構成し「馬蹄への道」が完成する．本書の主結果は第 7 章と第 8 章にある．

本書の読み方を示しておく．第 1 章から第 5 章までは準備編なのでこの順に読む．第 6 章は内容がややむずかしいので飛ばしてあとで参考にしてよい．次に第 7 章と第 8 章をこの順に読む．

数学的道具の補足を付録に載せた．我々が得た結果で本文に載せられなかった内容も載せた．付録は必要に応じて読んだり参考にしてほしい．付録を読まなくても本書で言いたいことは理解できる．またプログラムも載せたので

利用してほしい.

本書で利用する数学について述べておきたい. 関数の連続の概念とか極限の概念は利用する. 簡単な微分は使用する. 2 次方程式, 3 次方程式, そして 4 次方程式に関しては解の公式を利用する. 線形代数の基本である 2 行 2 列の行列の固有値の計算ができることと, 二進法の記法が使えることを前提としている. 初歩の集合と位相に関する知識も使う. この部分は幾何学的である.

本書の出版にあたり, 共立出版の方々, とくに大越隆道氏にお世話になった. 鳴門教育大学の松岡隆氏には, 本書の原稿全体を丁寧に読んでいただいた. 本書全体に関するコメントをいただくと共に, 改善すべき点や間違いを多数ご指摘いただいた. また, 東海大学の桐木紳氏, 九州大学の辻井正人氏, 北見工業大学の三波篤郎氏には, 本書を読んでコメントをいただいた. ここに謝意を表す.

2016 年 3 月

著者一同