翻訳ノート

小林欣吾・佐藤 創 共同執筆

2020 年 1 月 20 日 現在

以下で，訳書とは，『数学ゲームの必勝法』，共立出版，2016 を指し，原著とは，“Winning Ways for Your Mathematical Plays,” 2nd edition, A K Peters, 2001（4 巻本）を指す．（なお，原著初版 (2 巻本) の出版は 1982 年である．）

1　翻訳ノート vol.1

1.1　第 1 章

訳書 p.4（原著 p.2) 言葉遊び

「2 人のプレーヤーを**左手** (Left)，**右手** (Right) と呼ぼう．左手の手は任意の青 (bLue) 辺を 1 本除くことであり，同時に，そのことで地表（図では点線で描かれている直線）から離れてしまう辺も丸ごと除いてしまう．右手の手は任意の赤 (Red) 辺を 1 本除くことが違うだけである.」

この箇所の原文は，

‘We shall call the two players **Left** and **Right**. Left moves by deleting any bLue edge, together with any edges that are no longer connected to the ground (which is the dotted line in the figure), and Right moves by deleting a Red edge in a similar way.’

である．見てわかる通り，ここで著者たちは Left と bLue, Right と Red で言葉遊びをしている.「左手」と「青辺」,「右手」と「赤辺」の訳ではこの駄洒落は伝えきれない.

訳書 p.18（原著 p.15） 共通ゲームと個別ゲーム

impartial game, partizan game の訳には少なからず頭を悩ませた．不偏ゲーム，党派ゲームなども考えられたが，どうもしっくりしない．ある局面を前にしたとき，打てる手がどちらのプレーヤーにとっても同じ場合を impartial と呼び，異なる場合を partizan と呼んでいる．ことにパルチザンは日本では抵抗運動を想起させるので，そのまま使うのは不都合な感じもする．というわけで，impartial game を選択肢共通ゲーム，partizan game を選択肢個別ゲームの訳で通すこととした．このままでは冗長なので短く，共通ゲーム，個別ゲームと簡略化して呼ぶことも決めた．

1.2　第 2 章

訳書 p.26（原著 p.22) 単純ルール

単純ルールはよく味わっておく必要がある．p.29 で示されている 2 進分数を使って数を表すとき，その選択肢のいずれもが適合していない数を最も単純な数と定義している．だから例えば，$\{0|6\}$ を考えると，1, 2, 3, 4, 5 などは適合しているが，それらは $1 = \{0|\,\}, 2 = \{1|\,\}, 3 = \{2|\,\}, 4 = \{3|\,\}, 5 = \{4|\,\}$ であり，$1 = \{0|\,\}$ の 0 以外は適合する選択肢 (1, 2, 3, 4) をもっているので最も単純な数にはなり得ない．というわけで，$\{0|6\} = 1$ となるわけである．もちろん，それ以外にも適合する数はもっとあるが，すべて適合する選択肢をもっているので最も単純な数にはなり得ない．

なお，「単純」の定義は与えられていないが，「最も単純」を一意に決まる何か好ましいものと考えればよい．

訳書 p.29（原著 p.24) 言葉遊び

Lefty と Rita で p.4 と同じ言葉遊びをしている．

訳書 p.34（原著 p.29) 言葉遊び

「どちらのプレーヤーも刈り取ることができる緑辺もありうる．」は，原著では ‘there may also be some *grEen* edges, which Either player may chop.’ となって

いる．ここでも，著者は grEen と Either で楽しんでいる．日本語の「どちらの」と「緑」ではこの駄洒落を伝えきれない．

訳書 p.46（原著 p.40) 図の中の未知の記号

本文中の図で $*2$ という記法はまだ定義が現れて来ていない．p.47 で明らかになる．また，$\uparrow$ という記号は p.73 で説明される．

1.3　第 3 章

訳書 p.61（原著 p.53) 名文の引用

章の冒頭 名文引用部．Nim とは古語で盗むという意味らしい．そんな使い方があるのでこの引用をしたらしいが，ゲームのニムとはまったく関係はないようだ．

訳書 p.64（原著 p.56) mex

最小除外規則 (the minimal-excluded rule) の中で，「ここで，m を $a, b, c, \ldots$ を除く最小の非負整数とする．」と記述したが，原著では where m is the least number 0 or 1 or 2 or ... that is *not* among the numbers $*a, *b, *c, \ldots$. となっている．$*a, *b, *c$ らは heaps を表すはずで，数として見た方が '0 or 1 or 2 or ...' と比較できるので，訳のようにした．

minimal-excluded number とは，0, 1, 2, 3, ⋯ の中から，リストの載っている数 (excluded numbers) を除外した上で残った数の最小値を与えるのが関数 mex である．excluded numbers の最小値ではない（p.123 のノート参照）．

1.4　第 4 章

訳書 pp.92,101（原著 pp.82,90) ケイルスのニム値

もともとのケイルスのニム値の計算式は p.101 にあるように，

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{a}) \overset{*}{+} \mathcal{G}(\mathrm{b})) \quad \text{ここで} \quad 0 \leq \mathrm{a}, \mathrm{b} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{n}-1 \quad \text{あるいは} \quad \mathrm{n}-2$$

であり，ニム列は

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\
\mathcal{G}(n) = & 0\,. & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & \dots
\end{array}
$$

となり，図 4.1 で右手が勝てないのは

$$\mathcal{G}(1) \overset{*}{+} \mathcal{G}(7) \overset{*}{+} \mathcal{G}(3) = 1 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} 3 = 0$$

であることによる．

訳書 p.93（原著 p.83) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{N}$

$\mathcal{P}$ 局面とは先手必敗の局面である（直前 Previous のプレーヤーの勝ちとは，いま手番のプレーヤーは負けということである）. $\mathcal{N}$ 局面とは先手必勝の局面である（次 Next のプレーヤーの勝ちとは，いま手番のプレーヤーは勝ちということである）.

訳書 p.94（原著 p.84) n 山

n 山 (n-heap の訳) は n 個の豆で構成されるサイズ n の山を表す．この記法は p.103 の n 山 (n heaps の訳) という言い方と紛らわしい．後者は，n 個の山を意味しており，前者はサイズ n の 1 つの山を意味している．英語では，単数から複数を区別する “ s ” がつくので誤解は生じないが，日本語は不正確になるので紛らわしくなる（ハイフン “ - ” を使う習慣も日本語にはない).

訳書 p.94（原著 p.84) 引き算ゲーム

引き算ゲーム $S(2,5,6)$ では，なぜ $\mathcal{G}(n)$ は $\mathcal{G}(n-9)$ と等しくなることはないかというと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(n-9) &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}-11), \mathcal{G}(\mathrm{n}-14), \mathcal{G}(\mathrm{n}-15)) \\
&= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}), \mathcal{G}(\mathrm{n}-3), \mathcal{G}(\mathrm{n}-4)) \\
&\neq \mathcal{G}(n)
\end{aligned}
$$

であるから（このゲームのニム列の周期は 11 であった).

訳書 p.101（原著 p.90) Grundy 計算尺，原著誤り

原著は図 4.7 の右端の描き方が不正確である．滑尺の矢印は固定尺の $n = 174$ の位置を指し示し，$a + b = n - 3 = 171$ であり，滑尺の -1 の位置は固定尺の 172 の位置に，0 の位置は 171 の位置に合うはずである．そのように図を修正した．こうすると，173 の位置は，$51 * 2 + 34 * 2 + 3$ ということで算出されることが明解になる．

「この計算は滑尺を 34 だけ左にシフトして戻したときの $\mathcal{G}(140)$ に対する計算と完全に同じである．ただ, 規則的な値のニム和 34 個が重複して繰り返されていることだけが異なる.」したがって，mex をとるときに値は変化しないので，$\mathcal{G}(174) = \mathcal{G}(140)$ となるわけである．

訳書 p.102（原著 p.91) 言葉遊び

図 4.8 の caption は原著では，「Grundy Skayles?」となっていて，Scale 計算尺と Kayles ケイレスを駄洒落で，ケイレス (Kayles) の計算尺 (scaler) を Skayles というのはどうだろう？と言葉を掛けているのである．

訳書 p.104（原著 p.92) Dawson のゲーム

Dawson のゲームは

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{a}) \overset{*}{+} \mathcal{G}(\mathrm{b}))$$

をみたしており，Dawson のチェス $\cdot\mathbf{137}$ では $\mathcal{G}(-1) = 0$, $\mathcal{G}(0) = 0$, かつ $a + b = n - 3$, $-1 \le a, b$ であるが，Dawson のケイルス $\cdot\mathbf{07}$ では $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 0$, かつ $a + b = n - 2$, $0 \le a, b$ である．また，Dawson のケイルスの変形版 $\cdot\mathbf{17}$ では $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 1$, かつ $a + b = n - 2$, $0 \le a, b$ である．

訳書 p.109（原著 p.97) Prim と Dim

Prim^- では，n をたとえば素数 7 とすると，それより小さい coprime（n と互いに素）の数は 2, 3, 4, 5, 6 となり，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(7) &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(7-2), \mathcal{G}(7-3), \mathcal{G}(7-4), \mathcal{G}(7-5), \mathcal{G}(7-6)) \\ &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(5), \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(3), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(1)) = \mathrm{mex}(3, 1, 2, 1, 0) = 4\end{aligned}$$

と計算される．Prim$^+$ では，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(7) &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(7-2), \mathcal{G}(7-3), \mathcal{G}(7-4), \mathcal{G}(7-5), \mathcal{G}(7-6)) \\ &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(5), \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(3), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(1)) \\ &= \mathrm{mex}(3, 0, 2, 0, 1) \\ &= 4\end{aligned}$$

となり，同じ値となる．Prim$^-$ で $n = 6$ とすると，それより小さい coprime の数は 5 だけとなり，

$$\mathcal{G}(6) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(6-5)) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(1)) = \mathrm{mex}(0) = 1$$

であり，Prim$^+$ では

$$\mathcal{G}(6) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(6-5)) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(1)) = \mathrm{mex}(1) = 0$$

となる．

訳書 p.110（原著 p.98) ニム値の重複

引き算ゲーム $S(4, 10, 12)$ は

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}-4), \mathcal{G}(\mathrm{n}-10), \mathcal{G}(\mathrm{n}-12))$$

で，$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = \mathcal{G}(2) = \mathcal{G}(3) = 0$ を初期条件とする．このゲームは ·**000300000303** と表記される．引き算ゲーム $S(2, 5, 6)$ は

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}-2), \mathcal{G}(\mathrm{n}-5), \mathcal{G}(\mathrm{n}-6))$$

で，$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = 0$ を初期条件とする．このゲームは ·**030033** と表記される．

上記の引き算ゲームの符号数字には 0 と 3 しか現れない．それに対して，次に話題にされるゲームは 0 と 7 しか現れない．この例題の切り替えは少々唐突で混乱を起こさせるものである．たとえば，ケイレスの ·**77** の 2 重複は ·**077** となっており，そのニム列は

$$0.011223311443322\ldots$$

となっている．ケイレスのニム列は

$$0.1231432\ldots$$

となっていたことを思い出そう（p.92 の翻訳ノート，表 4.3）．この節の例題のゲーム ·**777077** の 2 重複ゲームは ·**07777000077** となっていることを注意しておこう．

訳書 p.123（原著 p.109) 言葉遊び

希少な値 (rare number) = 邪悪数 (evil) 偶数 (even) と語呂合わせをしている．

普通の値 (common number) = 嫌悪数 (odious) 奇数 (odd) と語呂合わせをしている．

訳書 p.123（原著 p.110) 除外された数

mex の定義の中には，excluded numbers （除外された数）というものは明示されていないが，mex(0, 1, 3, 4) などと書くとき，mex をとるリストに含まれている数（この例では，0,1,3,4）が excluded numbers である．minimal-excluded number とは，0, 1, 2, 3, ⋯ の中から，リストの載っている数 (excluded numbers) を除外した上で残った数（この例では，2,5,6,...）の最小値を与えるのが関数 mex である．excluded numbers の最小値ではない．

1.5　第 5 章

訳書 pp.136-138（原著 pp.122-124) 小切手の現金化

お金の流れがきちんと書かれてないので理解が難しいところがある．たとえば，図 5.4 の $\{0|-1\} = -1/2 + \{1/2|-1/2\}$ 局面で $\{1/2|-1/2\}$ の成分で手を打つということは，左手であれば，額面 1/2 の小切手を現金化してテーブルから 1/2 を手に入れるが，同時に 自分の持ち金を 1/2 減らす．しめて増減なしの 0 の変化である．右手であれば，額面 1/2 の小切手を現金化してテーブルから 1/2 を手に入れると同時に 1/2 を増やして持ち金を 1 増やす．このようなやり取りができるようにするために，ゲームのはじめになにがしかのお金を各プレーヤーは所持して，テーブルにもお金をおいてスタートするということになる．勝負は結果として手元に残る金額から開始時の所持金の額は引いて，すなわち，儲けた金額から計算する必要がある．

訳書 p.139（原著 p.124) 問いと答え

図 5.1（ドミニーリング）の局面で，愚かにも左手が右上隅の角から始めたとすると，値 ± 1 の領域が 2 つできてしまい，これらはペアとして値 0 となり，右手に渡された局面は全体で $0-1+0+3/4=-1/4$ の値をもつこととなり，右手が勝者となる．

訳書 p.140（原著 p.125) 同じ熱さ

「しかし，もし 2 つのゲームが同じ熱さならば，いくらか注意が必要である．」の意図は，

$$\{x|y*\}+*=\{x*|y\},\ (x>y)\ \text{のとき}$$

において，$x=y$ のときを除いていることに注目させることである．ゲーム $\{x|x*\}+*$ においては，プレーヤーたちは手を打つとき，$\{x|x*\}$ に手をつけるのではなく，$*=\{0|0\}$ に手をつけ，ゲームの値は $\{\{x|x*\}|\{x|x*\}\}$ となる．なぜかというと，

$$\begin{aligned}\{x|x*\}+* &= \{x*,\{x|x*\}|x**,\{x|x*\}\}\\ &= \{x*,\{x|x*\}|x,\{x|x*\}\}\\ &= \{\{x|x*\}|\{x|x*\}\}\end{aligned}$$

となるから．最後の等式は，左手にとって $x^L*<x$ であり，右手にとって $x^R>x*$ ということによる．

1.6　第 6 章

訳書 p.165（原著 p.149) $G+G=1$

$G=\{2|-1\}$ に対して，なぜ $G+G=1$ かというと，$G=1/2+\{3/2|-3/2\}$ であるから，

$$G+G=1+\{3/2|-3/2\}+\{3/2|-3/2\}=1+0=1$$

というわけである．

また，H が左ストップ 1，右ストップ -1 をもつというのは，左が $\{2|1\}=3/2+\{1/2|-1/2\}$ の選択肢に向かったとき，右手は必ず $\{1/2|-1/2\}$ で手を打つこ

とになり，右手の手番で $3/2-1/2=1$ で終局する，右手が $-1*=-1+\{0|0\}$ の選択肢に向かったとき，左手は必ず $\{0|0\}$ で手を打つので，左手の手番で $-1+0=-1$ で終局する．

さらに，$4H=1$ である理由は，対称化により，

$$\begin{aligned}2|1||-1* &= \{\{2|1\}|-1+\{0|0\}\}\\ &= \{3/2+\{1/2|-1/2\}|-1+\{0|0\}\}\\ &= 1/4+\{x|-x\}\end{aligned}$$

となるからである．ここで，$x=5/4+1/2\{\{1/2|-1/2\}-\{0|0\}\}$ とおいた．

訳書 p.166（原著 p.150) 図 6.4, 原著誤り

図 6.4 の雲の左は 0 のほんの少し左をよぎって 0 を完全に覆っていること，雲の右は 2 のほんの少し左をよぎって 2 は覆っていないことに注意．原著ではこの図に誤りがある（$L(G)=R(2)$ を $L(G)=L(2)$ に訂正した）．

訳書 p.167（原著 p.151) 冷却公式

冷却公式に関する記述が原著では

$G_t=\{G_t^L-t \mid G_t^R+t\}$ *unless* there is a
smaller temperature
t' for which $G_{t'}$ is infinitesimally
close to a number x, in which case
$G_t=x \quad$ for all $\quad t>t'$.

THE COOLING FORMULA

となっているが，これが G_t の再帰的な定義になっていることを読者が理解するのは大変に困難になると思われる，そこで，訳書では

もし，$G_{t'}$ がある数 x に限りなく近い，
t よりも小さな温度 t' が存在しなければ，
$G_t = \{G^L{}_t - t \mid G^R{}_t + t\}$ とする．
もし，存在する場合には，
すべての $t > t'$ に対して，$G_t = x$ とする．

冷却公式

というように，原著の記述 $G_t = \{G_t^L - t \mid G_t^R + t\}$ を $G_t = \{G^L{}_t - t \mid G^R{}_t + t\}$ と変更している．もともと，Conway の著書 ONAG, p.103 では，この修正のように記述されている．この修正をしても，この公式を正確に理解するにはかなり数学的な知識がないと無理かもしれない．たとえば， x を数とするとき，$x_t = x$ であることにも注意すれば，$G_1 = \{2_1 - 1| - 1_1 + 1\} = \{2 - 1| - 1 + 1\} = \{1|0\}$ となるわけである．

訳書 pp.171,179（ 原著 pp.154,161) 多重バー

多重バーはカッコを用いない時に用いる簡略記法であると宣言しておきながら，著者はカッコがあっても，p.171 のスノート局面のように，多重バーを用いている場合がある．これは意図的にバーの位付けを明示するためと思われる．

訳書 p.174（原著 p.157) 原著誤り

図 6.13 の左の順当な場合，原著では不等式が $\geq$ となっているが，$>$ の誤りと思われるので修正した．

訳書 p.178（原著 p.161) 大場より急場

原著では，Excitable moves keep **sente**. Equiable ones don't.（興奮する手は先手を維持する．順当な手はそうでない）とある．日本語の「先手」という言葉を著者らは誤解しているようだ．この英語に対応する日本の囲碁の格言は存在しない．文脈から「大場より急場」というのがふさわしい格言と思われる．

訳書 p.199（原著 p.180）原著誤り：スノートチェインの値

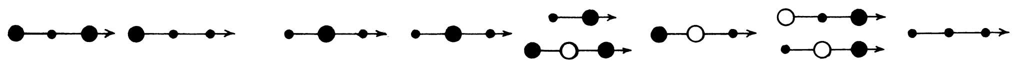
Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，図 6.28 には原著の誤り（右列の上から 2, 3 段目のスノートチェイン）を訂正した箇所がある．

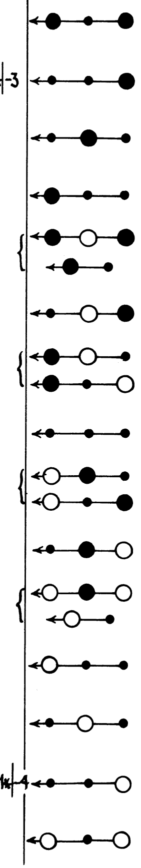
訳書 p.200（原著 p.181）原著誤り：スノートチェインの値

Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，表 6.1 の原著の誤りを訂正した箇所が多々ある．原著の Table 1 を次ページに，訳書の訂正版を次々ページに掲載しておく．原著の表ではスノートチェインの値は手書きで書かれていたが，訂正したところは印刷フォントとなっているのでよく見ればどう訂正がなされているのかが分かるはずである（図 6.28, 図 6.29 も同様）．Guy 教授の Errata List には誤った訂正指示までが混入していて，それに気づくのに多少時間を取られた．

訳書 p.201（原著 p.182）原著誤り：スノートチェインの値

Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，図 6.29 にも原著の誤り（左列の上から 10 段目のスノートチェイン）を訂正した箇所がある．





<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td>4|2||1*|*</td><td>4|3||1*|*</td><td>4|2||±1</td><td>3|2||1|0</td><td>3|2||±1,1*|*</td><td>1</td><td>4|2||0,1|-2</td></tr>
<tr><td>4|2||1* *</td><td>4|2||±1*</td><td>4|3||±1*</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||-1,1|-2</td><td>3|1||*|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td></tr>
<tr><td>4|3||1*|*</td><td>4|3||±1*</td><td>1*</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>3|2||0</td><td>3|2||-1</td><td>3|1||*|-1*</td><td>4|1*,2||*|-2*</td></tr>
<tr><td>4|2||±1</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>1</td><td>3|2||0|-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>3|1||0|-2</td><td>4|1||*|-3</td></tr>
<tr><td>3|2||1|0</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||0</td><td>3|2||0|-1</td><td>1</td><td>2|1||0</td><td>2|1||0|-1</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||1|-2,-1</td><td>3|2||-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3|1||*|-2</td><td>3|1||*|-1*</td><td>3|1||0|-2</td><td>2|1||0|-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>0</td><td>3|1||-1*|-3</td></tr>
<tr><td>4|2||0,1|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td>4|1||*|-3</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td>3|1||-1*|-3</td><td>*</td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||0|-2</td><td>1*</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1,0|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1|-3</td></tr>
<tr><td>3*||0|-1</td><td>3*||0|-2,*|-2</td><td>3|0,3|*,2*|1*||*|-1*,0|-2</td><td>2*|1*||0|-2</td><td>2|1||-1*</td><td>±2*</td><td>2|0,1||-1|-2</td><td>3|0,2*|1*||-1*|-3</td></tr>
<tr><td>2*||0|-1</td><td>2*||-1|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||-1|-2</td><td>±1*</td><td>1*||-1|-2</td><td>0||-1|-2</td><td>2|0,1*|*||-2|-3</td></tr>
<tr><td>3|1||0</td><td>3|1|||0|-3,1|0||-1|-2</td><td>3|1*||*|-2*</td><td>±(3|0,3|*)</td><td>2|1||*|-1*,0|-2</td><td>2|0||-1*|-2*</td><td>2|0||-1*|-3</td><td>3|*||-1|-4</td></tr>
<tr><td>3|1||0,0|-3</td><td>3|1||*|-3,-1*|-2*</td><td>±(2|1)*</td><td>2*|*||-1*|-3</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||0|-3,*|-3,-1*|-2*</td><td>-1*</td><td>2*|*||-1*|-4,-2</td></tr>
<tr><td>3|1||-1|-2</td><td>±(3|1)</td><td>3|*,2*|1*||-1|-3</td><td>3|0,2|1||0|-1|||-1|-3</td><td>2|1||-2*</td><td>2|0,2|*||-3*</td><td>2|0||-2|-3</td><td>3|1,3|1*,2|1||0|-1|||-1|-4,-1*|-4</td></tr>
<tr><td>±(2|1)</td><td>2|1||-1|-3</td><td>3|0,0||-1|-3</td><td>0||-1|-3</td><td>1|0||-2*</td><td>1|0||-3*</td><td>*|-1*,±1||-2|-3</td><td>0,2|-1||-2|-4</td></tr>
</table>

Table 1. Values of Snort Chains with Six Nodes.

表 6.1　6 節点のスノートチェインの値.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td>4|2||1*|*</td><td>4|3||1*|*</td><td>4|2||±1</td><td>3|2||1|0</td><td>3|2||±1,1*|*</td><td>1</td><td>4|2||0,1|-2</td></tr>
<tr><td>4|2||1*|*</td><td>4|2||±1*</td><td>4|3||±1*</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||-1,1|-2</td><td>3|1||*|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td></tr>
<tr><td>4|3||1*|*</td><td>4|3||±1*</td><td>2|±1*</td><td>2,4|1,4|1*||±1*,1|−1*</td><td>3|2||0</td><td>3|2||-1</td><td>3|1||*|-1*</td><td>4|1*,2||*|-2*</td></tr>
<tr><td>4|2||±1</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>2,4|1,4|1*||±1*,1|−1*</td><td>1</td><td>3|2||0|-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>3|1||0|-2</td><td>4|1||*|-3</td></tr>
<tr><td>3|2||1|0</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||0</td><td>3|2||0|-1</td><td>1</td><td>2|1||0</td><td>2|1||0|-1</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||1|-2,-1</td><td>3|2||-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3|1||*|-2</td><td>2*|1*,3|1||*|−1*</td><td>3|1||0|-2</td><td>2|1||0|-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>0</td><td>3|1||-1*|-3</td></tr>
<tr><td>4|2||0,1|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td>4|1||*|-3</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td>3|1||-1*|-3</td><td>*</td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||0|-2</td><td>1*</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1,0|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1|-3</td></tr>
<tr><td>3*||0|-1</td><td>3*||0|-2,*|-2</td><td>3|0,3|*,2*|1*||*|-1*,0|-2</td><td>2*|1*||0|-2</td><td>2*|−1*</td><td>±2*</td><td>2|0,1||-1|-2</td><td>3|0,2*|1*||-1*|-3</td></tr>
<tr><td>2*||0|-1</td><td>2*||-1|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||-1|-2</td><td>±1*</td><td>1*|−2*</td><td>0||-1|-2</td><td>2|0,1*|*||-2|-3</td></tr>
<tr><td>3|1||0</td><td>3|1|||0|-3,1|0||-1|-2</td><td>3|1*||*|-2*</td><td>±(3|0,3|*)</td><td>2|1||*|-1*,0|-2</td><td>2|0||-1*|-2*</td><td>2|0||-1*|-3</td><td>3|*||-1|-4</td></tr>
<tr><td>3|1||*|−2</td><td>3|1||*|-3,-1*|-2*</td><td>±(2|1)*</td><td>2*|*||-1*|-3</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||0|-3,*|-3,-1*|-2*</td><td>-1*</td><td>2*|*||-1*|-4,-2</td></tr>
<tr><td>3|1||-1|-2</td><td>±(3|1)</td><td>3|*,2*|1*||-1|-3</td><td>3|0,2|1||0|-1|||-1|-3</td><td>2|1||-2*</td><td>2|0,2|*||-3*</td><td>2|0||−2|−3</td><td>3|−1,3|−1*,2|1|0|−1|||−1|−4,−1*|−4</td></tr>
<tr><td>±(2|1)</td><td>2|1||-1|-3</td><td>2|*||−1|−3</td><td>0||-1|-3</td><td>1|0||-2*</td><td>1|0||-3*</td><td>*|-1*,±1||-2|-3</td><td>0,2|-1||-2|-4</td></tr>
</table>

1.7 第 7 章

訳書 pp.226,228（原著 pp.205,207) 言葉遊び

図 7.17, 図 7.19．原著はキリン (giraffe) を G-raph と書いて，グラフと掛けた駄洒落になっている．

訳書 p.238（原著 p.217) 言葉遊び

図 7.31．原著では hard という言葉を，解くのが困難という意味と，ベッドが固いという意味に掛けた駄洒落をここでも使っている．A Moderately Hard Bed という caption を「適度に難しいベッド」とするのでは著者のふざけが伝わらないので,「適度に固いベッド」と訳すことにした．

1.8 第 8 章

訳書 p.263（原著 p.241) 言葉遊び

青 (Blue) 花がちょうど赤 (rED) 花と同じ数で
均衡が保たれている (BlancED) 花園を
フラワーベッド (flowerBED) と呼ぼう．

のところでは，大文字の BED がどの行にも組み込まれるように言葉遊びをしている．

翻訳ノート

小林欣吾・佐藤 創 共同執筆

2020 年 1 月 20 日 現在

以下で，訳書とは，『数学ゲームの必勝法』，共立出版，2016 を指し，原著とは，“Winning Ways for Your Mathematical Plays,” 2nd edition, A K Peters, 2001（4 巻本）を指す．（なお，原著初版 (2 巻本) の出版は 1982 年である．）

2　翻訳ノート vol.2

2.1　第 9 章

2.2　第 10 章

訳書 p.319（原著 p.304)

「ここで，ドット対は最適左手選択肢の（どうでもいい, irrelevant）左計算書と，最適右手選択肢の（どうでもいい）右計算書を表している.」とは，$\{..7_2|0_4..\}$ を正確に書いた $\{8_1 7_2|0_4-5_3\}$ の 8_1，-5_3 のことである．そしてつぎの節に記述されているように，熱い局面に対する計算書規則により 9×3 の計算書は $7_3 0_5$ となるわけである．

訳書 p.322（原著 p.307) 言葉遊び

GOOD と odd，EVIL と even でまた言葉遊びをしている．

訳書 p.327（原著 p.312) 第 14 節

共通ゲームであれば，手番のプレーヤーが手を打てなければ，相手も打てないので，

どちらのプレーヤーも手を打てないことになり，2 つの規則を区別することは意味がない．このとき，通常のように，打てなくなったプレーヤーが負けが標準ルール，打てなくなったプレーヤーが勝ちがミゼールルール．個別ゲームのときに，2 つの規則を区別する意味がある．どちらのプレーヤーも手を打てないときに終局とする場合，勝者をだれにするのかについて補則が必要になるわけだ．

訳書 p.328（原著 p.312) 言葉遊び
or($\vee$) に対して ur($\triangledown$) と洒落ているわけである．

訳書 p.328（原著 p.312) 言葉遊び
ファラダの切断された頭 (severed head) と切断された選択的複合 (severed selective compound) とを引っかけた言葉遊びにもなっている．

2.3　第 11 章

訳書 p.343（原著 p.327) 章の表題
この章に「決着のないゲーム Games Indefinite」という表題が付いているが，本文中にそれが全然出てこない．どう扱ったらいいか不明．

訳書 p.346（原著 p.329) 有終ゲーム
「この強い終局条件」とは，プレーヤーが交互にプレーするという条件をはずしても手の無限列が生じないということである．強い終局条件をみたすゲームを有終ゲーム（ender）といい，ある時点から左手と右手が交互に打てば必ず停止するゲームを停止ゲーム（stopper）という (p.354 のノート参照)．

訳書 p.347（原著 p.330) 無限のニム
$2^\omega = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots = < 0, 1 > \cdot < 0, 1 > \cdot < 0, 1 > \cdot < 0, 1 > \cdots = \omega$ であり，序数の意味で $2^\omega = \omega$ となっている．$< 0, 1 >$ はペアを 1 つのものとみることに対応している．

訳書 p.349（原著 p.333) Hilbert

「Hilbert ニム」とは無限次元ニムのことであるらしい．

訳書 p.353（原著 p.335) ループ型ゲーム

図 11.7 のゲームで左手が先手のときは，彼が打てる手は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のどの駒でも構わないが，必勝手は γ の駒を α に動かすことである．すると，右手は α にある 2 つの駒しか動かせず，そのうちの 1 つを δ に動かさざるをえない．この次に左手は α に残った 1 つを右の倉庫にしまう．その結果，駒は β, δ にそれぞれ 1 つと 2 つ残される局面となる．この局面からは右手は手を打てない．すなわち，左手の勝利である．

右手が先手のとき，打ってはいけない手は，γ の駒を β に動かすことである．これをすると，左手は α の駒を右の倉庫にしまって，β, δ に駒がそれぞれ 2 つと 1 つ残される局面となり，右手には打つ手が残されない．したがって，右手は初手で α の駒を δ に動かし，駒が β, γ, δ だけに存在する局面を作る．ここから，左手が駒を倉庫にしまおうと α に運んでも，右手はそれを δ に運んでしまって左手の野望をくじくことができる．すなわち，無限プレーとすることができ，ドローとなる．

訳書 p.354（原著 p.336) あとでなるほど

double-vision double-take を，“2 つの見方あとでなるほど”と訳してみた．double vision は複視．double take は a delayed reaction indicateng surprise あとで気がついてはっと驚くこと．当初，”複視遅延驚き”と訳してみたりした．

訳書 p.354（原著 p.337) 停止ゲーム

停止ゲーム（stopper）では

$$g \to g^X \to g^{XY} \to \ldots \to g^{XY\ldots L} \to g^{XY\ldots LR} \to g^{XY\ldots LRL} \to \ldots$$

はあらわれないが，左手と右手が交互でなく 2 手づつ打つ無限列などはありうる．

$$g \to g^X \to g^{XY} \to \ldots \to g^{XY\ldots L} \to g^{XY\ldots LLRR} \to g^{XY\ldots LLRRLL} \to \ldots$$

次のような無限列もありうる．

$$g \to \ldots \to g^{XY\ldots LRRLRLLR} \to \ldots$$

「あなたがどのような局面から開始しようと，プレーは最後には停止することになる」のは左手と右手が交互に手を打つという条件のもとでの話である．

左手と右手の勝手な順序で打つ無限列はどんなものでもあらわれないゲームが有終ゲーム（ender）である．というわけで，

$$\{\text{ender}\} \subset \{\text{stopper}\}$$

であり，図 11.7 のゲームは停止ゲームではない．したがって，有終ゲームではもちろんない．

訳書 p.357（原著 p.338) にじり寄り

Sidling を「にじり寄り」と訳した．ループ型ゲームに対する近似解法で，繰り返して近似を改良していこうとする手法である．

訳書 p.357（原著 p.339) 図 11.7 の解

図 11.7 の解法をここで与えている．実際の戦法は p.353 への翻訳ノートとして先に記した．

訳書 p.362（原著 p.343) 図 11.9

図 11.9 が値 $-\frac{1}{64}\,\&-\frac{5}{8}$ をもつというのは，Li のルールからオンサイドは下から赤，青，青，青，青，青，青というハッケンブシュ列で，その値が $-\frac{1}{64}$ であり，オフサイドは下から赤，青，赤，青というハッケンブシュ列で，その値が $-\frac{5}{8}$ となっていることによる．

訳書 p.364（原著 p.345) 図 11.10

p.363 に書いてある Li のルールを考慮すると，図 11.10 のハッケンブシュ絵には間違いが含まれていると当初思われた．上段左から 3 番目の絵の薄青ハッケンブシュ

列，および，上段左から 6 番目の絵の薄青枝に乗ったピンクハッケンブシュ列は，上下が反転しているのではないかと思われたが，薄青やピンクの枝は刈られることはなく，単に反対の色に変色されるだけなので無限に伸びた列が有限の列に変わることはなく，反転させる必要はない．

しかし，左から 1 番目の青ハッケンブシュ列，および，5 番目の赤ハッケンブシュ列はこの絵のように逆さまになっていないといけない．また原著では，赤，ピンクや青，薄青がはっきりでていない．上段左から，青，青，薄青，薄青，青と赤，薄青とピンク，青と赤，薄青とピンク，薄青とピンクで，下段左から，青と赤，青と赤，薄青とピンク，薄青とピンク，薄青とピンクとなっている．

訳書 p.380（原著 p.359) 図 11.20, 原著誤り

原著の Figure 20 とその上のリストアップされている等式は以下の通り．

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A} = \mathbf{ace} = 0|\mathbf{tiny} & \mathbf{A}- = \mathbf{on}|\mathbf{A}||0 & \mathbf{A}+ = \mathbf{A} \\
\mathbf{J} = \mathbf{joker} = 0|\bar{\mathbf{A}}+ & \mathbf{J}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{J}}||\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{J}+ = \mathbf{J} \\
\bar{\mathbf{J}} = -\mathbf{joker} = \mathbf{A} - |0 & \bar{\mathbf{J}}+ = \mathbf{A}||\mathbf{J}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{J}}- = \bar{\mathbf{J}} \\
\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{ace} = \mathbf{miny}|0 & \bar{\mathbf{A}}+ = 0||\bar{\mathbf{A}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{A}}- = \bar{\mathbf{A}}
\end{array}$$

であるが，これらには多くの誤りが含まれている（原著初版に含まれている誤りを踏襲するばかりでなく，さらに誤りが増加している）．正しくは次の通りである．

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A} = \mathbf{ace} = 0|\mathbf{tiny} & \mathbf{A}- = \mathbf{on}|\mathbf{A}||0 & \mathbf{A}+ = 0\|\mathbf{A}|\mathbf{off} \\
\mathbf{J} = \mathbf{joker} = 0|\bar{\mathbf{A}}+ & \mathbf{J}- = \mathbf{on}|\mathbf{J}||0 & \mathbf{J}+ = 0\|\mathbf{J}|\mathbf{off} \\
\bar{\mathbf{J}} = -\mathbf{joker} = \mathbf{A}- |0 & \bar{\mathbf{J}}+ = 0||\bar{\mathbf{J}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{J}}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{J}}||0 \\
\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{ace} = \mathbf{miny}|0 & \bar{\mathbf{A}}+ = 0||\bar{\mathbf{A}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{A}}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{A}}||0
\end{array}$$

ちなみに，原子量 0 のスーツは次のように定義される：

$$\begin{aligned}
&\clubsuit = 0\clubsuit = 1\clubsuit|0 = 2\clubsuit|0||0 = 0|\mathbf{A}||0|||0, \\
&\diamondsuit = 0\diamondsuit = 0|\bar{1}\diamondsuit = 0||\bar{\mathbf{J}}|0, \\
&\heartsuit = 0\heartsuit = 1\heartsuit|0 = 0|\mathbf{J}||0, \\
&\spadesuit = 0\spadesuit = 0|\bar{1}\spadesuit = 0||0|\bar{2}\spadesuit = 0|||0||\bar{\mathbf{A}}|0.
\end{aligned}$$

n	$n\clubsuit$	$n\diamondsuit$	$n\heartsuit$	$n\spadesuit$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\bar{3}=-3$	$\bar{2}\clubsuit\mid 0$	$\bar{2}\diamondsuit\mid 0$	$\bar{2}\heartsuit\mid 0$	$\bar{2}\spadesuit\mid 0$	For all games X
$\bar{2}=-2$	$\bar{1}\clubsuit\mid 0$	$\bar{1}\diamondsuit\mid 0$	$\bar{1}\heartsuit\mid 0$	$\mathbf{A}\mid 0$	in this table
$\bar{1}=-1$	$\clubsuit\mid 0$	$\mathbf{J}\mid 0$	$\heartsuit\mid 0$	$0\mid 2\spadesuit$	$X+=X-=X$
0	$1\clubsuit\mid 0$	$\mathbf{A}\mid\bar{1}\diamondsuit$	$1\heartsuit\mid\bar{\mathbf{A}}$	$0\mid\bar{1}\clubsuit$	**deuce, trey,** ... are
1	$2\clubsuit\mid 0$	$0\mid 1\diamondsuit$	$0\mid\mathbf{J}$	$0\mid\spadesuit$	alternative names for
2	$0\mid\mathbf{A}$	$0\mid 1\diamondsuit$	$0\mid 1\heartsuit$	$0\mid 1\spadesuit$	$2\clubsuit, 3\clubsuit, \ldots$
3	$0\mid 2\clubsuit$	$0\mid 2\diamondsuit$	$0\mid 2\heartsuit$	$0\mid 2\spadesuit$	(but **ace** $\neq\clubsuit$).
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
	$\clubsuit=0\clubsuit$	$\diamondsuit=0\diamondsuit$	$\heartsuit=0\heartsuit$	$\spadesuit=0\spadesuit$	

図 20　Laying Out the Cards.

n	$n\clubsuit$	$n\diamondsuit$	$n\heartsuit$	$n\spadesuit$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\bar{3}=-3$	$\bar{2}\clubsuit\mid 0$	$\bar{2}\diamondsuit\mid 0$	$\bar{2}\heartsuit\mid 0$	$\bar{2}\spadesuit\mid 0$	この表のすべての
$\bar{2}=-2$	$\bar{1}\clubsuit\mid 0$	$\bar{1}\diamondsuit\mid 0$	$\bar{1}\heartsuit\mid 0$	$\bar{\mathbf{A}}\mid 0$	ゲーム X に対して
$\bar{1}=-1$	$\clubsuit\mid 0$	$\bar{\mathbf{J}}\mid 0$	$\heartsuit\mid 0$	$0\mid\bar{2}\spadesuit$	$X+=X-=X$
0	$1\clubsuit\mid 0$	$0\mid\bar{1}\diamondsuit$	$1\heartsuit\mid 0$	$0\mid\bar{1}\spadesuit$	**deuce, trey,** ...は
1	$2\clubsuit\mid 0$	$0\mid\diamondsuit$	$0\mid\mathbf{J}$	$0\mid\spadesuit$	$2\clubsuit, 3\clubsuit, \ldots$ に対する
2	$0\mid\mathbf{A}$	$0\mid 1\diamondsuit$	$0\mid 1\heartsuit$	$0\mid 1\spadesuit$	別名である
3	$0\mid 2\clubsuit$	$0\mid 2\diamondsuit$	$0\mid 2\heartsuit$	$0\mid 2\spadesuit$	（ただし，**ace** $\neq 1\clubsuit$）．
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
	$\clubsuit=0\clubsuit$	$\diamondsuit=0\diamondsuit$	$\heartsuit=0\heartsuit$	$\spadesuit=0\spadesuit$	

図 11.20　カードのレイアウト．

訳書 p.382（原著 p.361）原著誤り

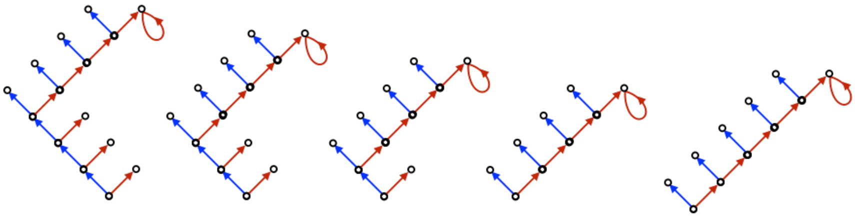
図 11.22 において原著に誤りがある（原著の初版を改訂する時に生じた）．

$$(X+)+(Y+)+(Z+)\&(T+) \quad \text{は} \quad (X+)+(Y+)=(Z+)\&(T+) \quad \text{に，}$$

$$(X-)+(Y-)+(Z-)\&(T-) \quad \text{は} \quad (X-)+(Y-)=(Z-)\&(T-) \quad \text{に，}$$

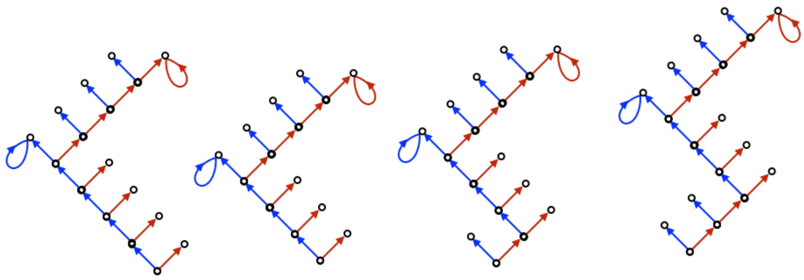
それぞれ修正して訳書に記載した．

以下に，トランプ・カードの各スーツのプラム木を例示しておく．

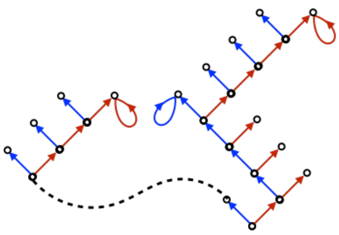


$\bar{1}\clubsuit = \clubsuit|0$ $\quad$ $\clubsuit = 1\clubsuit|0$ $\quad$ $1\clubsuit = 2\clubsuit|0$ $\quad$ $2\clubsuit = 0|\mathrm{A}$ $\quad$ $3\clubsuit = 0|2\clubsuit$

図 11.A　The Plumtrees of Clubs



$\bar{2}\diamondsuit = \bar{1}\diamondsuit|0$ $\quad$ $\bar{1}\diamondsuit = \bar{\mathrm{J}}|0$ $\quad$ $\diamondsuit = 0|\bar{1}\diamondsuit$ $\quad$ $1\diamondsuit = 0|\diamondsuit$



原著 p.359 の figure 20 では

$\diamondsuit = \mathrm{A}|\bar{1}\diamondsuit$

となっているが、これは不自然な誤りと考えられる。

図 11.B　The Plumtrees of Diamonds

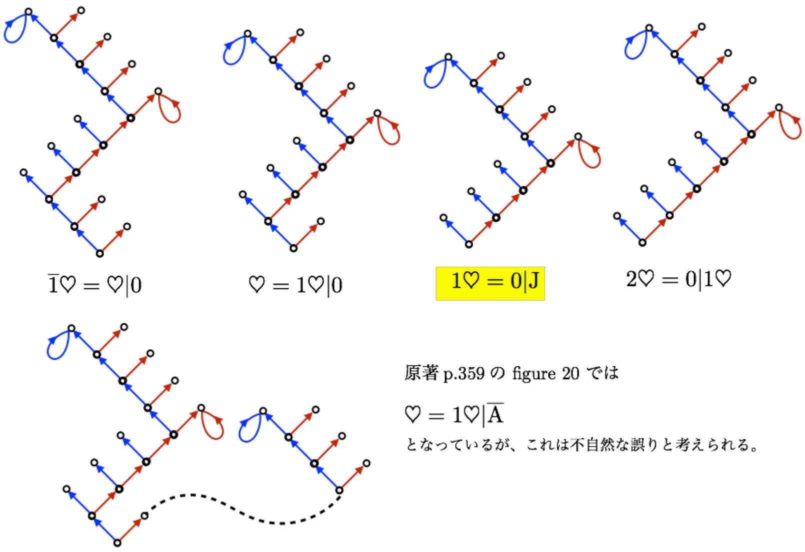


図 11.C　The Plumtrees of Hearts

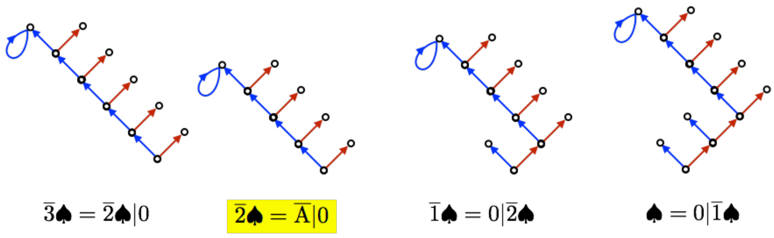


図 11.D　The Plumtrees of Spades

2.12　第 12 章

2.13　第 13 章

訳書 p.440（原著 p.414）ゲーム生息地図

　図 13.1 の「失われた世界のゲーム生息地」について本文は何も触れていないが，ミゼール共通ゲームの分類が動物の棲み分け地図にたとえて描かれていて，第 13 章の総まとめとして見ると興味深い．著者らの遊び心の産物で，趣向に満ちていることを知ると楽しめるが，領域の命名法に秩序のないことが残念である．

北部の「飼いならされランド」は飼いならされた（tame）動物の生息地である．この地域にはニムランドと飼いならされサイドがあり，ニムランドのニム連山には属性 0 の Dawson のケイレス D_{15}（p.468），属性 1 の Grundy のゲーム G_{15}（p.469），属性 2 の士官ゲーム O_9（p.469）とガイルス Y_{19}, Y_{26}（p.465 の属性列より），属性 3 のケイルス K_6（p.461 の表 13.4）などが棲んでいる．また，ミゼールニム $2+2, 3+2$ はそれぞれ属性が $0^0, 1^1$（堅気な単位, p.451）で飼いならされていてニムランドに棲む．ゼリービーンズ J_{15} は属性が 3^3，ケイルス K_7 は属性が 2^2，等々であり，飼いならされサイドに棲む．

川を隔てて南側の未開地方は野生（wild）動物の生息地で，「反抗的（restive）地区」「不安な（restless）地域」「より野生的（wilder）地域」に分かれる．「いままさに野生に別れを告げん（only just gone wild)」とする動物は不安な地域全域と反抗的地区の一部に棲む．また，「半分飼いならされた（half-tame)」動物は反抗的地区，および，より野生的地域の一部に棲むが不安な地域には棲まない，いままさに野生に別れを告げんとする反抗的な動物は半分飼いならされている，などという関係が地図の境界線で表現されている．

原著にはいくつか誤りがある．半分飼いならされたゲーム H_4, H_5 (定規分割) の属性はそれぞれ $2^{20}, 1^3$ (p.467) であるから，原著における両者の位置を入れ替えた．また，反抗的な Y_{18} (ガイルス), V_{32} (変形定規分割) は原著ではいままさに野生に別れを告げんとする動物に分類されるが，いずれも野生の選択肢 z_1 をもつ（p.465）ので訳書では地図を修正した．

より野生的地域に棲むブージャム（boojum）は，Lewis Carol のナンセンス詩『スナーク狩り』に出てくる架空の動物で非常に危険らしい．

参考のため，原著の図 13.1 を以下に載せておく：

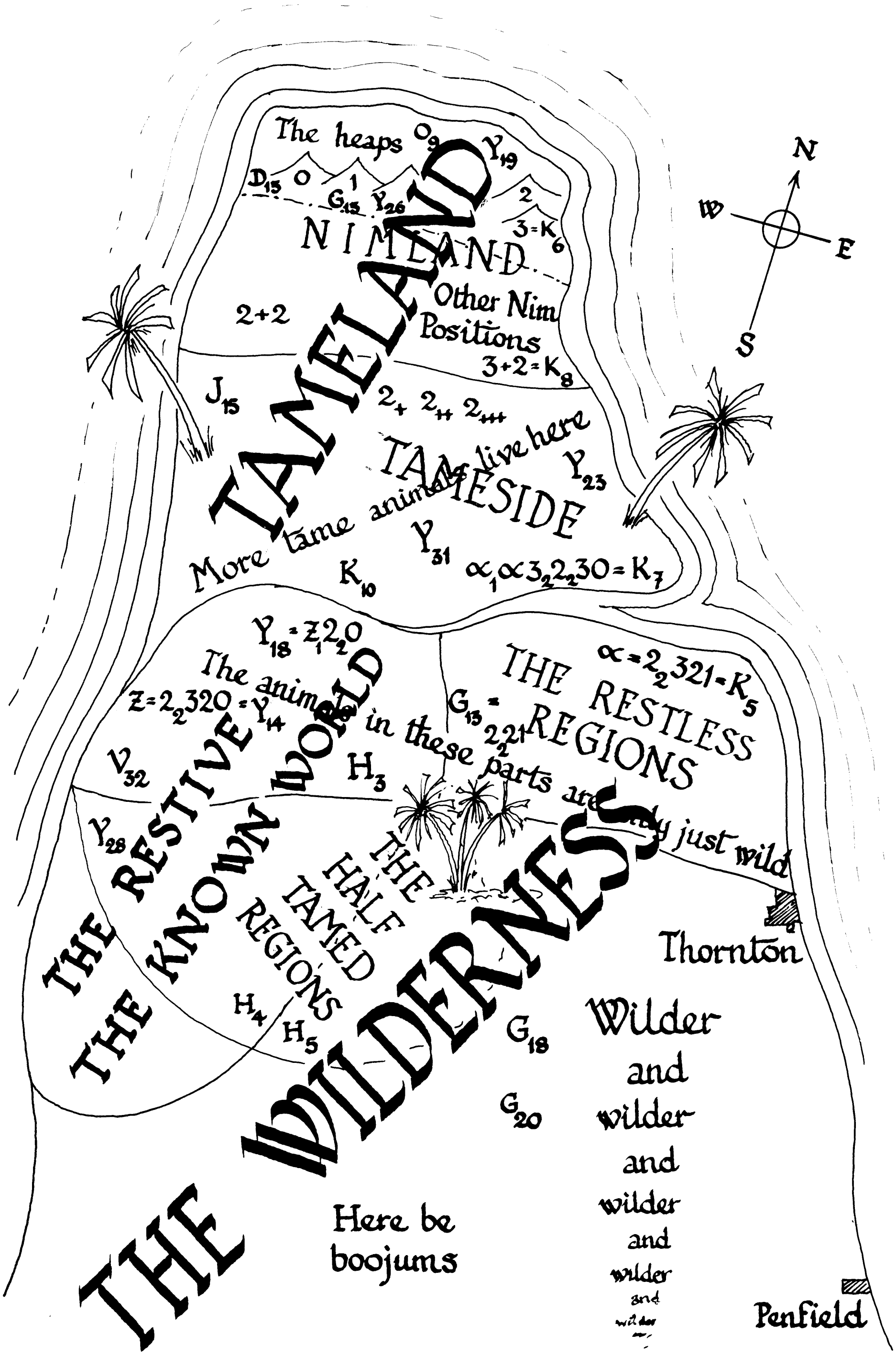


Figure 1. Game Reserves in the Lost World.

訳書 p.442（原著 p.416) ただし書き

手なしゲーム（Endgame）とは，打つ手のない局面 $\{\,|\,\} = 0$ であり，標準プレーではゼロ局面と呼んでいたもので，先手必敗の局面であるが，ミゼールプレーでは先手必勝の局面である．

図 13.3 のように，ミゼールプレーで $H, X, Y, Z, \ldots$ がすべて手なしゲーム，すなわち，先手必勝のとき，あなたが先手なら，$G + X + Y + Z + \ldots$ であなたは G でしか手を打てなくて，局面 D または E を作り，手番を相手に渡す．相手はむざむざあなたを勝たすために H に向かう手を打つわけがない．敵はそれ以外の選択肢を選ぶはずで，その勝敗はこの段階ではわからない．そういう選択肢を選んだとしても G と H の勝敗が一緒でなければ，G と H を等価とは見なせないので，このただし書き「ただし，H が選択肢をもたないときは，G と H は同じ勝敗 0 をもつという条件の下で」が必要となる．

訳書 p.443（原著 p.416) ニム

1 つ山の $\mathcal{P}$ 局面（後手必勝局面）について，ニムゲームの場合は極めて簡単である．すなわち，ミゼールプレーではゲームの値が 1 のときだけ，標準プレーではゲームの値が 0 のときだけである．

訳書 p.444（原著 p.418) ただし書き

「ミゼール Mex ルール」において，なぜ「少なくとも 1 つは 0 か 1」をただし書きにつけているのかが読者に分かりにくい．たとえば，$G = \{0, 2, 5\}$ の場合，$H = \{0\}$ とは可逆手 2,5 の除去により値 1 となる（これはミゼールでは後手必勝の $\mathcal{P}$ 局面である．それに対して，$G = \{1, 3, 4\}$ では，G からは先手は不利な手 3, 4 へは向かわず，勝利手 1 を選ぶ．相手に残った 1 個の豆を無理矢理取らせることで勝てる．すなわち．不利な手の除去により $G = \{1\} = 0$．これは，$H = \{\} = 0$ とするとき，ただし書きに従った G からの可逆手の除去ともみることができる．

訳書 p.445（原著 p.419) $2+2$

ミゼールプレーでは，0 は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面であり，$0+0$ も同じに $\mathcal{N}$ 局面である．2 は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面であるが，$2+2$ は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面である．

1 は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面であり，$1+1$ は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面である．$2+2$ は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面であり，$(2+2)+(2+2)$ もまた後手必勝，すなわち，$\mathcal{P}$ 局面となっていることが確認できる（try!)．$G+G$ は $\mathcal{N}$ にも $\mathcal{P}$ にもなりうる．（標準プレーでは常に $G+G$ は $\mathcal{P}$ である．）

訳書 p.445（原著 p.419) $a_n = a+n$

$a_n = a+n$ と書くとき，a は一般的な局面だが n は n 山，すなわち，サイズ n のニム山を意味している．

訳書 p.448（原著 p.421) 可逆手の除去

$\mathrm{G}_{14} = \{0,1,3,a\}$ と $H = \{0,1\} = 2$ が同値であることは，$3 = \{0,1,2\}$，$a = \{1,2,2+2\}$ であるから，3 と a はともに $H=2$ を選択肢としてもつ可逆手（p.441）で，G_{14} から除去できることから明らかである．

訳書 p.446（原著 p.419) Grundy 山をニム山で

このあたりの Grundy のゲームの値の計算は行き届いた注意が肝要だ．ゲームの値をニムゲームの評価に置き換えて計算していることをよく理解しておく必要がある．$\mathrm{G}_{13} = 2_221 = \{2+2,2,1\}$ と表したとき，選択肢 $2+2,2,1$ は Grundy 山 (G_2+G_2, G_2, G_1) ではなく，ニム山の 2+2, 2, 1 である．もし，これが G_2+G_2, G_2, G_1 だったら，この先，打つ手が存在しない．

訳書 p.448（原著 p.421) 救出する

p.447 の最下段からの文章は，サイズ 13, 16, 19 の Grundy 山はいずれも値は $a = 2_221 = \{2+2,2,1\}$ であるので，a を含んだ局面を評価する仕方について言及しているのだ．「救出することができる」とは，難しそうな局面の評価が簡単にでき

る場合がある，という意味である．

$a+a$ について．a 自身は選択肢として 1 をもっているので先手必勝局面（$\mathcal{N}$ 局面）であり，$a+1$ は後手必勝局面（$\mathcal{P}$ 局面）である．このことは表 13.1 からもわかるがきちんとチェックしてみる必要もある．先手は 1 で手を打たない．$a=\{2+2,2,1\}$ で手を打つとき，1 や 2 には向かわない．もしそうすると相手に 1 山だけを残す勝利手を渡してしまうからだ．だから，$2+2$ に向かって手を打ち局面は $2+2+1$ となる．これは先手必勝の局面である．1 山を崩し，$2+2$ とすると，相手は $1+2$ か 2 の局面しかつくれない．そこで 1 山を作って相手に渡せば勝てることになる．すなわち，$a+1$ は後手必勝局面になっている．したがって，$a+a$ は先手必勝局面（$\mathcal{N}$ 局面）であることがわかる．というのは，先手であれば $a+1$ という局面を作ることができるからだ．ミゼールプレーでは 0 は先手必勝局面なので，$a+a$ を 0 と見なしてしまおうというのがここでの趣旨である．p.445 のノートで書いたように $\mathcal{N}+\mathcal{N}=\mathcal{P}$ ということは一般には成立しないので，個別にチェックして調べないといけない．

枠入りのルールが正しいことの証明は書かれていない．これは読者への挑戦状のようにも思う．表 13.1 を頼りにして，たとえば，$a+1\in\mathcal{P}$, $a+1+3+4\in\mathcal{P}$ などがこの規則で成り立っていることが分かる．しかし，この表から $a+1+3+4\in\mathcal{P}$ が成り立つことは分かるが，4 山があるのでこのルールは適用できない．

訳書 p.449（原著 p.422） 属性

「標準ニム値 $\mathcal{G}^+(G)$ は，標準プレーにおいて $G+n$ が $\mathcal{P}$ 局面となるニム山のサイズ n として一意に定義された」と言うが，第 1 巻に標準ニム値を定義したところは見当たらない．しかし，このことは第 3 章の p.64，共通ゲームの Sprauge-Grundy 理論の記述などから明らかである．ニム値 (Nim-value) という用語が初めて出てくるのは第 4 章 p.93 である．これは定義とは言いがたい．その直後で $\mathcal{P}$ 局面，$\mathcal{N}$ 局面という概念が出てくるので，冒頭の定義があるとすればそれ以降なのだが，明示的にそれを言っている箇所はない．

山のサイズ n で特定されるニム系の標準ゲームに対しては，p.92 で $\mathcal{G}(n)$ の記号が定義され，以後頻繁に使用される．著者は，それもって標準ニム値 $\mathcal{G}^+(G)$ が定義さ

れたと考えているらしい．

訳書 p.451（原著 p.424） 原著誤り

原著では COMBINING TAME GAMES という囲みの中が，

> If *any* component is firm, so is the sum, and
> $$a^\alpha + b^\beta + \cdots = (a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)^{\alpha \overset{*}{+} \beta \overset{*}{+} \cdots}.$$
> If *all* components are fickle, so is the sum, and
> $$a^\alpha + b^\beta + \cdots = (a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)^{1 \overset{*}{+} \alpha \overset{*}{+} \beta \overset{*}{+} \cdots}.$$

COMBINING TAME GAMES

と記述されている．この等式には簡単な反例があり誤りであることが直ぐわかる．すなわち，前者では $2^2 + 1^0 \neq (2 \overset{*}{+} 1)^{2 \overset{*}{+} 0} = 3^2$，後者では $1^0 \neq 1^{1 \overset{*}{+} 0} = 1^1$ である．

訂正は容易で，和の属性が堅気である前者ではミゼールニム値を標準ニム値 $(a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ と等しくすればよく，和の属性が浮気である後者では，標準ニム値 $(a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ は 0 または 1 で，対応するミゼールニム値を 1 または 0 とするには，$(1 \overset{*}{+} a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ とすればよい．したがって，訳書をそのように修正した．なお，原書のこの誤りは A. Siegel も指摘しているように，その初版から第 2 版への改定過程で生じたものと思われる．この誤りには当初どのように訂正するのが適切なのかだいぶ悩まされたが，最終的に得た結論は初版と一致していることを確認して安堵したのであった．

堅気成分を含む和の属性が堅気であり，すべての成分が浮気の和の属性が浮気である，という記述の正しいことは，ニムの場合は容易に確認できる．浮気と堅気はこの章の冒頭で，サイズ 2 以上の山は堅気，シングルトンは浮気と定義されている．したがって，堅気＋堅気＝堅気，堅気＋浮気＝堅気，浮気＋浮気＝浮気は明らかだ．

訳書 p.457（原著 p.429）忍び取りゲームと蛇ゲーム

忍び取りゲーム ·**31** とは，列の端から 1 個ずつ，最後は 2 個取ることも許すゲーム．蛇ゲーム ·**73** とは，列のどこからでも 1 個は取れるが，隣り合った 2 個は列の内部から取れ，また最後に残った 2 個も取れるゲーム．

訳書 p.461（原著 p.432）反抗的ゲームと不安なゲーム

選択肢が $0^1, 0^0, a^a, b^b, \ldots$ か，または $1^0, 1^1, a^a, b^b, \ldots$ $(a, b, \cdots \geq 2)$ であるゲームは反抗的 (restive) であると言っている．すでに，p.450 において反抗的 (restive) の "定義" があり，ゲームのニム値 g^γ について，g は 0 か 1 で，γ は 2 以上，すなわち，$0^2, 0^3, \ldots$ または $1^2, 1^3, \ldots$ のいずれかでなければならないとされたが，それは必要条件であって，ここで選択肢の条件によって定義される．

$G = \{0^1, 0^0, a^a, b^b, \ldots\}$ とすると，G の属性 g^γ は $g = \text{mex}(0, a, b, \ldots) = 1, \gamma = \text{mex}(1, 0, a, b, \ldots) \geq 2$ であるから，これは p.450 の意味で反抗的である．また，$G = \{1^0, 1^1, a^a, b^b, \ldots\}$ とすると，属性 g^γ は $g = \text{mex}(1, a, b, \ldots) = 0, \gamma = \text{mex}(1, 0, a, b, \ldots) \geq 2$ であるから，これも p.450 の意味で反抗的である．

反抗的の定義は p.453 で拡張され，ある条件をみたせば，野生の選択肢も許される（そのため，反抗的でも半分飼いならされていないものが生ずる）．

これに対して，不安な (restless) ゲームの定義はここでなされ，選択肢はすべて飼いならされていて，それらの属性が $1^0, 0^0, a^a, b^b, \ldots$ か，または $0^1, 1^1, a^a, b^b, \ldots$ $(a, b, \cdots \geq 2)$ であるゲームとされる．その結果，不安なゲームの属性 g^γ は $g \geq 2$, $\gamma = 0$ または 1 となる．

訳書 p.466（原著 p.437） 整数の分割

下から 3 行目の右の式には原著初版の改版中に生じた誤植 $R_{2^k a} + R_{2^i b}$ があり，細かい文字 i を ℓ に修正した．

定規分割ゲームには整数 $n = 2^k d$ (d は奇数) を 2 つに分割する手があり，それに 2 つのタイプがあることを $n = 88 = 2^3 \cdot 11$ を例に解説しよう．(1) $d = 11$ を奇数 a=5 と偶数 6 に分割し，$72 = 2^3(5 + 6) = 2^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3$ とする方法が右の式

$R_{2^k a} + R_{2^\ell b}$ に対応する．(2) 偶数 $2 \cdot 11 = 22$ を 2 つの奇数 $a = 7$ と $b = 15$ に分割し，$88 = 2^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 15$ とする方法が中の式 $R_{2^j a} + R_{2^j b}$ に対応する．不等式 $j < k < \ell\,(j = 2, k = 3, \ell = 4)$ が理解できるでしょう．

訳書 p.467（原著 p.437） 原著誤り

定規分割 $\mathrm{H}_3, \mathrm{H}_5, \mathrm{H}_7, \ldots$ の属性は原著で 1^{31} と記されるが，H_3 は反抗的であると述べているので p.449 の短縮形の約束により，訳書では 1^3 に修正した（図 13.1 の修正と関連する）．

訳書 p.473（原著 p.442） 原著誤り

Dim^- の属性列の中で原著に 1^{46}, 2^{13} とあるのを，それぞれ 2^{46}, 1^{13} に修正した（根拠は第 1 巻 p.109 のニム列）．

訳書 p.477（原著 p.446） 原著誤り

2 行目左から 3 番目のケイルス局面の属性が原著では 2^{30} であるが，表 13.4 には見出せない．2 行下の飼いならし可能な属性の記法と整合するので，訳書では 2^{20} に修正した（原著初版と一致）．

訳書 p.478（原著 p.448） 原著誤り

下から 2 行目，長さの並び $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1$ に対応する局面を，原著では $\mathrm{D}(5) \cdot \mathrm{E}(4)$ と表しているが，並び $4 \cdot 4 \cdot 1$ は $\mathrm{E}(4)$ ではなかろう．訳書ではこの部分を $\mathrm{D}(5) \cdot \mathrm{D}(4, 1)$ に修正した．

翻訳ノート

小林欣吾・佐藤 創 共同執筆

2020 年 1 月 20 日現在

以下で，訳書とは『数学ゲーム必勝法』，共立出版，2019 を指し，原著とは，"Winning Ways for Your Mathematical Plays," 2nd edition, A K Peters, 2001（4 巻本）を指す．（なお，原著初版 (2 巻本) の出版は 1982 年である．）

3　翻訳ノート vol.3

3.1　第 14 章 ひっくり返せ

訳書 p.487（原著 p.461）　セイウチと代用ウミガメと大工（図 14.1）
　いずれも Lewis Carroll の童話『不思議の国のアリス』(1865),『鏡の国のアリス』(1871) のキャラクターである．本書には，この他にトゥイードルダムとトゥイードルディー，白の騎士，チェシャ猫，ドードー，いも虫などが登場する．

訳書 p.488（原著 p.462）　偽装ニム (disguise for Nim)
　拡張されたニムのこと（訳書 p.63）．すべての選択肢共通ゲームは偽装ニムに帰着できるという定理がある（第 3 章 Sprague-Grundy 理論）．

訳書 p.489（原著 p.463）　代用ウミガメ（Mock Turtle）
『アリス』の書かれた当時，イギリスでは高価なウミガメスープのまがいものが代用ウミガメスープと呼ばれていたことから，Carroll は "代用ウミガメ" なる動物を創作した．

訳書 p.490（原著 p.464）　$\mathcal{G}(n)$ を計算するとき
　$\mathcal{G}(n)$ は，代用ウミガメ・ゲームにおいて番号 n のウミガメだけが表で他のウミガメがすべて裏である局面のニム値のこと．ウミガメは 0 番から番号を振り，0 番は代

用ウミガメで $\mathcal{G}(0) = 1$ である．$n_1, n_2, \cdots, n_k$ 番が表で他が裏である局面のニム値は $\mathcal{G}(n_1) \overset{*}{+} \mathcal{G}(n_2) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathcal{G}(n_k)$ で与えられる．

$\mathcal{G}(n)$ は一般のウミガメ返しゲームでも使用する．ゲームは 1 手でひっくり返せるウミガメの最大個数 t により区別される．t が奇数のゲームでは先頭は 0 番の代用ウミガメで $\mathcal{G}(0) = 1$ であり，t が偶数のゲームでは先頭は 1 番で代用ウミガメではなく，$\mathcal{G}(1) = 1$ である（表 14.3 を参照）．

訳書 p.490（原著 p.464）　鬼数 (odious number)・愚数 (evil number)

代用ウミガメ・ゲーム（$t = 3$）における $\mathcal{G}(n)$ が n 番目の鬼数であることの証明．

帰納法の仮定より，$a < n$ ならば $\mathcal{G}(a)$ は a 番目の鬼数とする．

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname*{mex}_{a,b<n} \{0, \mathcal{G}(a), \mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(b)\}$$

であるから，$\mathcal{G}(n)$ より小さい鬼数 $\mathcal{G}(a)$ はすべて除外され，$\mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(b)$ によって除外されるのは愚数なので $\mathcal{G}(n-1)$ の次の鬼数は除外されない．また，$\mathcal{G}(n)$ より小さいすべての愚数は，2 つの鬼数のニム和 $\mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(b)$ で表されるので，除外される．したがって，$\mathcal{G}(n)$ は n 番目の鬼数である．

訳書 p.492（原著 p.464）　代用ウミガメ定理

$t = 2m+1$ ゲームの “良い局面” が，表のコインが偶数枚の $\mathcal{P}$ 局面であること（本文の証明結果）と，定理の主張 :「ニム値 $\mathcal{G}(n)$ はすべて鬼数である」の間には少し飛躍がある．定理の導出は以下の通り．

すべての $k\,(< n)$ について $\mathcal{G}(k)$ が鬼数であることを仮定して，$\mathcal{G}(n)$ が鬼数であることを示す．

$\mathcal{G}(n)$ が 2 の冪乗 2^p に等しいときは，$\mathcal{G}(n)$ の 2 進展開に 1 が 1 個しか現れないので，$\mathcal{G}(n)$ は明らかに鬼数である．

$\mathcal{G}(n) = 2^p + x$ $(0 < x < 2^p)$ である n を考える．（$\mathcal{G}(n) \neq 0$ であるから番号 n のコインだけが表である局面は $\mathcal{P}$ 局面ではないので）n を含み，n 以下のいくつかの番号のコインが表である $\mathcal{P}$ 局面が存在する．本文の証明結果より，この $\mathcal{P}$ 局面には表のコインが偶数枚ある．その番号を $k_1, k_2, \cdots, k_{2m-1}, n$ とすると，奇数個のニム和 $K \overset{\text{def}}{=} \sideset{}{^*}\sum_{1 \le j \le 2m-1} \mathcal{G}(k_j)$ は仮定により鬼数であり，この $\mathcal{P}$ 局面のニム値は愚数 $K \overset{*}{+} \mathcal{G}(n) = 0$ であるから，$\mathcal{G}(n)$ は鬼数 K に等しい．

訳書 p.492（原著 p.464）　「代用ウミガメ」は必要か？

この章前半のゲームは，左から一列に並んだ有限個のマスにコインを並べて，1 個の表のコインを裏に返し，それより左にあるコイン（表でも裏でも構わない）を高々 $t-1$ 個ひっくり返すという手を，プレーヤーが交互に打つゲームである．手が打てなくなったプレーヤーの負けという標準ルールに従う．1 手でひっくり返せるコインの最大個数 t の偶奇性がゲームのルールに影響を与えるわけではないが，$t=2m$ ゲームのニム値 $\mathcal{G}(n)$ と $2m+1$ ゲームのニム値 $\mathcal{G}(n+1)$（列の先頭を 0 番とする）の間には「代用ウミガメ定理」に記された興味深い関係が認められ，それを印象づけるために代用ウミガメを登場させたものと思われる．

しかし，このことでかえってこれらのゲームの t の偶奇性によらないルールの共通性が見失われ，代用ウミガメ，メビウス，モーグル，モイドールなどの奇数ゲームと，名前のついていない偶数ゲームが異なった種類のゲームであると勘違いしかねないことにもなる．

訳書 p.493∼4（原著 p.466∼7）　コイン 18 枚のメビウス

枚数 18 の特殊性に依拠した議論である．$\mathcal{P}$ 局面がメビウス変換で保存されることや，そのために用意されるラベル付けの根拠が何も説明されていないので，示された結果の確認しかできない．

図 14.5 におけるラベル $\infty, 0, \pm1, \cdots, \pm8$ とコイン番号の対応により，コイン 6 枚が表の $\mathcal{P}$ 局面の基本形 (表 14.4) は右の図における 3 点を結ぶ直線で表示できる．例えば，ラベル $\infty, 0, \pm1, \pm4$ に対応する番号 0,3,1,5,2,4 のニム値 (表 14.3, 8 進表示) の

$$\begin{array}{ccccc} \pm6 & - & \pm1 & - & \pm3 \\ | & & | & & | \\ \pm2 & - & \infty,0 & - & \pm8 \\ | & & | & & | \\ \pm5 & - & \pm4 & - & \pm7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 633 & - & 35 & - & 606 \\ | & & | & & | \\ 556 & - & 11 & - & 547 \\ | & & | & & | \\ 365 & - & 24 & - & 341 \end{array}$$

和は $(1 \overset{*}{+} 10) \overset{*}{+} (2 \overset{*}{+} 37) \overset{*}{+} (4 \overset{*}{+} 20) = 0$ である（図右の 11, 35, 24 を通る直線と対応）．$\mathcal{P}$ 局面の基本形のラベル 2 倍は他の基本形になる．

例 $(\infty, 0, \pm1, \pm4) \times 2 = (\infty, 0, \pm2, \pm8)$,　$(\pm6, \pm2, \pm5) \times 2 = (\pm5, \pm4, \pm7)$.

メビウス変換の例　$x \to y = \dfrac{2x+5}{x+3}$ (mod 17)

x	∞	0	1	2	3	4	5	6	7	8	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	2	-4	6	-5	-1	-3	4	0	7	5	9	-2	8	-6	3	∞	1	-7

図 14.5 の $\mathcal{P}$ 局面 $(\infty, 1, 2, 0, 5, -3) \longrightarrow \mathcal{P}$ 局面 $(2, 6, -5, -4, 4, \infty)$.

メビウス変換の多様性

平行移動 $x+b=\dfrac{1x+b}{0x+1}$，逆数 $(x+e)^{-1}=\dfrac{0x+4}{4x+4e}$，

2^m 倍 $2^m x=\dfrac{ax+0}{0x+1/a}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
2^m	2	4	8	-1	-2	-4	-8	1
a	6	2	5	4	7	8	3	1
$1/a$	3	-8	7	-4	5	-2	6	1

6 個の各基本形を平行移動 (17 種) すると 102 個の $\mathcal{P}$ 局面を得る．

訳書 p.499（原著 p.473）　グラント

このゲームが Grundy のゲームの偽装であることが興味深い．

$n \le 2$ のときは打つ手がないので $\mathcal{G}(n)=0$ である．$n \ge 3$ のときの選択肢は 4 枚のコイン $(0,a,n-a,n),(0<a<n/2)$ をひっくり返すことで，局面はコイン $0,a,n-a$ が表になり，そのニム値は $\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(k-a)$ である（$\mathcal{G}(0)=0$ だから）．したがって，

$$\mathcal{G}(n)=\operatorname*{mex}_{0<a<n/2}\Big(\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(n-a)\Big)$$

であり，Grundy のゲームのニム値と一致する．

例（図 14.8）の解説

豚の顔がコインの表，尻がコインの裏を表す．この局面のニム値は表のコイン $2,3,5,6,8,9$ のニム値の和 $0\overset{*}{+}1\overset{*}{+}2\overset{*}{+}1\overset{*}{+}2\overset{*}{+}1=1$ である．この局面を $\mathcal{P}$ 局面に移すために，ニム値を 1 減らす手を求める．$\mathcal{G}(9)=1$ であるから，$\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(9-a)=0\,(0<a<9/2)$ となる a を求めると $a=2,3$ を得る．$a=2$ の手 $(0,2,7,9)$ が斜線掛けで示されている．これ以外に，$(0,2,6,8)$ などの手もある．

参考　1次元ひっくり返しゲームの分類

共通のルール：最も右のコインは表から裏へ返す.

(1) 高々 t 枚返し　高々 t 枚のコインをひっくり返す.

ウミガメ返し	$t=2$	
代用ウミガメ	$t=3$	
メビウス	$t=5$	
モーグル	$t=7$	
モイドール	$t=9$	
モトレー	$t=\infty$	先手の1手（表コインをすべて返す）で終局

(2) t 枚返し　ちょうど t 枚のコインをひっくり返す.

2枚返し	$t=2$
3枚返し	$t=3$
t 枚返し	t

(3) 連続返し　連続したコインをひっくり返す.

定規	長さに関する制限なし.
代用ウミガメ5	連続した5枚のコインのうち高々3枚返す.
3枚返し5	連続した5枚のコインのうちちょうど3枚返す.
定規5	連続したコインを高々5枚返す.
メビウス19	連続した19枚のコインを高々5枚返す.

(4) 左右対称の位置にあるコインをひっくり返す.

ターニップス	等間隔の3枚を返す
グラント	左右対称の4枚を返す．左端のコインを含む.
シム	左右対称　他に制限なし.
シムプラー	左端のコインを含むシム.

訳書 p.500（原著 p.473）　アクロスティック 2 枚返し

1 次元的な特徴をもつ 2 次元ゲームである．次の例で説明する．

$a\backslash b$	0	1	2	3	4	5
0	●	●	●	●	●	●
1	●	●	●	●	●	●
2	●	●	○	●	●	●
3	●	○	●	●	●	○
4	●	●	●	○	●	●

（この範囲の外には
表コインはない
ものとする）

4 つの表コインの位置 (2,2),(3,1),(3,5),(4,3) のニム値を表 14.7 で求めると，局面の値 $0 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} 6 \overset{*}{+} 7 = 3$ が分かる．この中の値 7 を $2 \overset{*}{+} 6 = 4$ に変える手を求めるため，(4,3) より西または北で値 4 を探すと (4,0) を得る．実際，(4,3) と (4,0) のコイン 2 枚を返すと値が $0 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} 6 \overset{*}{+} 4 = 0$ の $\mathcal{P}$ 局面となる．これ以外にも良い手は複数ある．

訳書 p.504（原著 p.476）　タータンの定義

スコットランドの毛織物につける格子縞模様タータンチェックはよく知られている．ここでは，ボックスに囲われた場所をタータンと呼ぶ．

訳書 p.512（原著 p.483）　アグリー積

アグリー化（uglication）の意味が取りにくいが，2 つのニム値を変数とする関数のことで，アグリー積と訳した．アグリー積定理では，ゲーム A と B のアグリー積 $A \cup B$ のニム値を，2 つのニム値 $\mathcal{G}_A(a)$, $\mathcal{G}_B(b)$ のアグリー積 $\mathcal{G}_A(a) \overset{*}{\cup} \mathcal{G}_B(b)$ で表している．

表 14.13 と分配則により，任意のニム値 $x, y\,(< 512)$ に関するアグリー積 $x \overset{*}{\cup} y$ が計算できる．しかし，ゲーム A と B のアグリー積 $A \cup B$ の任意の局面 (a, b) のニム値 $\mathcal{G}_{A\cup B}(a, b)$ が $\mathcal{G}_A(a) \overset{*}{\cup} \mathcal{G}_B(b)$ であるとは限らない．

例　アクロスティック 2 枚返し（$A = B = 2$ 枚返し）に関しては，$\mathcal{G}_{A\cup B}(a, b)$ は $a = 5, b = 11$ のとき $5 \overset{*}{\cup} 11 = 0$ ではなく $5 \overset{*}{+} 11 = 14$ である．($a = 4, b = 7$ のとき $4 \overset{*}{\cup} 7 = 4 \overset{*}{+} 7$ であるのは偶然）このゲームでは，一般に $\mathcal{G}_{A\cup B}(a, b) = a \overset{*}{+} b$ である．

参考　2次元ひっくり返しゲームの分類

共通のルール：最も南東にあるコインは表から裏に返す.

(1) タータン・ゲーム　演算子は $\times$, ニム値の計算は $\overset{*}{\times}$（ニム積）

コーナー返し	2 枚返し $\times$ 2 枚返し
スワーリング・タータンズ	モトレー $\times$ モトレー
織物	定規 $\times$ 定規
カーペット	シム $\times$ シム
敷き詰めカーペット	シムプラー $\times$ シムプラー
窓	ターニップス $\times$ ターニップス
扉	ターニップス $\times$ グラント

(2) アクロスティック・ゲーム　演算子は $\cup$（アクロスティック積）,
ニム値の計算は $\overset{*}{\cup}$（アグリー積）

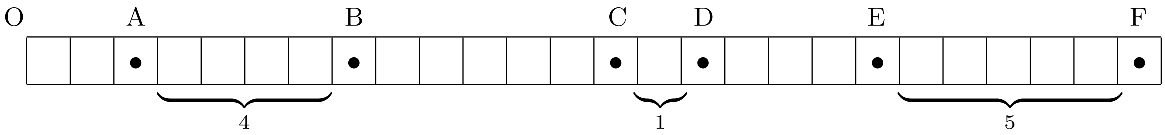
アクロスティック 2 枚返し	2 枚返し $\cup$ 2 枚返し （$\mathcal{G}(a,b) = a \overset{*}{+} b$）
アクロスティック・ターニップス	ターニップス $\cup$ ターニップス
ストリーキング	モトレー $\cup$ モトレー
ストリッピング	定規 $\cup$ 定規
ストリップ・アンド・ストリーク	ストリッピング $\cup$ ストリーキング
アクロスティック・代用ウミガメ 5	代用ウミガメ 5 $\cup$ 代用ウミガメ 5

(3) 3 次元ゲーム（2 次元の延長として）

スパーリング	2 枚返し $\cup$ 2 枚返し $\cup$ 2 枚返し
ボクシング	2 枚返し $\times$ 2 枚返し $\times$ 2 枚返し
フェンシング	(無 $\times$ 2 枚返し $\times$ 2 枚返し) $\cup$ (2 枚返し $\times$ 無 $\times$ 2 枚返し) $\cup$ (2 枚返し $\times$ 2 枚返し $\times$ 無)

3.2　第 15 章　チップと細長ボード

訳書 p.519（原著 p.491）　偽装ニム



章の冒頭に紹介された例は大変興味深い．AB, CD, EF 間のマスの数がニム山のサイズで，OA, BC, DE 間のマスは偽装用である．上の図は “三山崩し” の $\mathcal{P}$ 局面（$4 \overset{*}{+} 1 \overset{*}{+} 5 = 0$）である．先手が B を 1 つ進める手には後手に F を 3 つ進める手がある（$3 \overset{*}{+} 1 \overset{*}{+} 2 = 0$）．また，先手が C を 5 つ進める偽装手には後手に D を 5 つ進める可逆手がある（第 3 章 ポーカーニム参照）．

訳書 p.520（原著 p.492）　2 つのシルバーダラー・ゲーム

1 枚の銀貨を使う De Bruijn のゲームでは，金袋になった最も左のマスの番号を 0 とする．2 つのバージョンがあり，どちらも銀貨獲得がゲームの目的である．図 15.2 のような偽装ニムを標準ルールでプレーすることを基本とする．読者への出題がある．

先のバージョンでは，銀貨が列の先頭でない限り金袋を利用するが，銀貨が先頭になると，すべてのコインが番号 1 から連続して並ぶまで金袋は使わない．やむなく銀貨を金袋に入れたプレーヤーが負け．

後のバージョンでは，銀貨が列の 3 番目のコインになるまで金袋を利用するが，銀貨が列の 2 番目になると，すべてのコインが番号 1 から連続して並ぶまで金袋は使わない．やむなく先頭のコインを金袋に入れたプレーヤーが負け．

訳書 p.521（原著 p.493）　アントニムのゲーム表

3 コイン・アントニムのゲーム表を T，すなわち $(a, b, T(a, b))$ を $\mathcal{P}$ 局面とする．このゲーム表から，たとえば局面 $(8, 11, 13)$ においては，13 のコインを 4 に，11 を 6 に，あるいは 8 を 1 に移すのがよい手であることがわかる．ゲーム表の作り方から，任意の非負整数 a, $b\,(a \neq b)$ に対して，

$$T(a, b) = \operatorname{mex}\{\, a, b, T(a', b), T(a, b') \mid a' < a,\ b' < b,\ a \neq b\} \tag{1}$$

である．$(a, b, T(a, b))$ が $\mathcal{P}$ 局面であることは，$T(0, 0) = 0$ からの帰納法によって証

明される．

囲みの中の命題は次のようにも表現できる：

$$a \neq b \text{ に対して，} \quad T(a,b)+1=(a+1) \overset{*}{+} (b+1). \tag{2}$$

アントニム・ゲーム表　$T(a,b)$

	0	1	2	$\cdots$	b
0	0	2	1	$\cdots$	·
1	2	X	0	$\cdots$	·
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a	·	·	·	$\cdots$	c

$T(a,b)$ に対応するニム和表

	1	2	3	$\cdots$	$b+1$
1	0	3	2	$\cdots$	·
2	3	0	1	$\cdots$	·
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$a+1$	·	·	·	$\cdots$	$c+1$

(1) から (2) は次のように導くことができる．以下の推論では，mex の対象 $\{x,y,\ldots,z\}$ には常にある $m \geq 0$ に対する $T(m,m)$ が含まれ，$T(m,m)+1$ を $(m+1) \overset{*}{+} (m+1)$ と考えることにより，

$$\operatorname{mex}\{x,y,\ldots,z\}+1=\operatorname{mex}\{x+1,y+1,\ldots,z+1\}$$

が成立することと，ニム和の定義 $m \overset{*}{+} n = \operatorname{mex}\{m \overset{*}{+} n',\ m' \overset{*}{+} n \,|\, n'<n,\ m'<m\}$ を利用する．

$$\begin{aligned}
T(a,b)+1 &= \operatorname{mex}\{a,b,T(a,b'),T(a',b)\,|\,a'<a,\ b'<b\}+1 \\
&= \operatorname{mex}\{a+1,(a+1)\overset{*}{+}(b'+1),b+1,(a'+1)\overset{*}{+}(b+1)\,|\,a'<a,\ b'<b\} \\
&= \operatorname{mex}\{(a+1)\overset{*}{+}b'',\ a''\overset{*}{+}(b+1)\,|\,a''<a+1,\ b''<b+1\} \\
&= (a+1)\overset{*}{+}(b+1).
\end{aligned}$$

訳書 p.523（原著 p.495）　Fano のアントニム $\mathcal{P}$ 局面発見器（図 15.4）

13 章の図 13.8（2 巻 p.478）にニム $\mathcal{P}$ 局面を巧妙に表現した Fano の 3 角形があり，アントニム $\mathcal{P}$ 局面との対応関係（前項 (2) 式）を確認することができる．

訳書 p.524（原著 p.496）　囲みの中の表現

シノニムは同義語（synonym），アントニムは反意語（antonym）とそれぞれ同音であることにもとづく言葉遊びになっている．同義語と反意語は正反対だが，ゲームの場合は同じだというちょっと面白い発見である．

訳書 p.525（原著 p.497）シモニムのゲーム表 (表 15.4) における $\overrightarrow{n}$ と $\downarrow m$

「エントリーが行または列のラベルと等しいことがある」と記されているが，もちろんそのエントリーの選択は勝手ではない．例えば，$(1,3)$ の場合は，それより前に同じ行または同じ列に現れない最小の数は 5 であるが，$(1,3,5)$ は $\mathcal{P}$ 局面ではない．すでに $(1,1,3)$ が $\mathcal{P}$ 局面であることから，$(1,3)$ は $\downarrow 1$ となる．また，$(1,4)$ が $\overrightarrow{4}$ であることは，局面 $(1,4,4)$ から移動するすべての局面について，そこからシモニム $\mathcal{P}$ 局面への手があることにより示される．$\downarrow\overrightarrow{0}$ も同様である．表 15.4 はこのように作成されたものである．

訳書 p.526（原著 p.497）　4 つ山シモニムに関する規則

なかなか読み取りにくいが，仮に変換してみて変換後の局面が条件を満たさない場合は，次の変換を試みるという記述法である．すなわち，領域が一番大きいとか 2 番目に大きいとかは，変換後の数たちに関して考えているので，例えば 4-7 が一番大きい領域であっても，2-3 が 2 番目に大きい領域とは限らない．領域には 1 の前に 0 だけからなる領域も想定されている．

例

$$\begin{array}{ccccc} n & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline n' & 5 & 4 & 1 & \\ n'' & & & & 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}}\right\} \text{ニム和 } 0.$$

なお，4 つの山が同じサイズの場合は自明な $\mathcal{N}$ 局面なので，この規則から除かれている．

訳書 p.530（原著 p.501）　ツッピン車輪（図 15.7）

ミゼールプレーへの読み替え表で，太字 **1**，...，**5** はツッピン車輪の中の太字に対応する（ただし，**0** は図に現れない）．太字 **2** に対応する系列 $\cdot\cdot *^5 \cdot\cdot = *^7$ は $\mathrm{K}_7 = k_1 k 3_2 2_2 30\,(k = 2_2 321)$ に等しく，結果として属性 2^{20} の飼いならされたゲームになる．選択肢に野生のゲームを含むので細字 2 と区別する．細字の 4 以後，太字の **3** 以後のゲームは野生となり，ニムではない（属性の計算法については第 13 章

p.459 を参照のこと).

例　図 15.6 のツッピンのニム値は，p.529 の分解定理により，次のように計算される：

$$\cdot{*}\cdot{*}{*}{*}\cdot\cdot{*} = \cdot{*} + {*}{*}\cdot\cdot{*} = {*} + {*}{*}{*}{*} = 1 \overset{*}{+} 1 = 0$$

訳書 p.534（原著 p.504）　Flanigan のゲーム

8 進表示で **·34** のゲームは，山から 1 個取るときは山を分けない（無くしてもよい）が，2 個取るときは山を必ず 2 つに分けるというルールに従う．$10 = \{9, 1+7, 2+6, 3+5, 4+4\} = 2_2 1 = f$ である．このゲームは Jim Flanigan によって完全に解析された（第 13 章の表 13.5 参照）.

訳書 p.536（原著 p.507）　4 コイン・Welter ゲーム

$$a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c \overset{*}{+} d = 0 \text{ のとき，そのときに限り } [a|b|c|d] = 0$$

という規則は，a, b, c, d のつがいの作り方に関わらず成り立つ.

訳書 p.540（原著 p.511）　Welter 関数の逆転

その内容は「偶数個置き換え定理」で表現される．すなわち，n を含む文字 $a, b, c, \ldots, d, n$ のうち任意の偶数個をプライム $'$ のつく文字で置き換えた等式 $[a|b|c|\ldots|d] = n$ が成立する.

Welter 関数 $[a|b|c|\ldots|d]_k = n$ の逆転とは，任意の値 n' $(\neq n)$ に対して連立方程式

$$n' = [a'|b|c|\ldots|d]_k = [a|b'|c|\ldots|d]_k = [a|b|c'|\ldots|d]_k = \ldots = [a|b|c|\ldots|d']_k$$

をみたす k 個の数 $a', b', c', \ldots, d'$ を求めることを言い，これを

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & \ldots & d \\ a' & b' & c' & \ldots & d' \end{array}\right] = \begin{array}{c} n \\ n' \end{array}$$

で表している．$[a'|b'|c'|\ldots|d']_k$ の値は，k が偶数のとき n，奇数のとき n' となる.

訳書 p.542（原著 p.511）　算盤局面

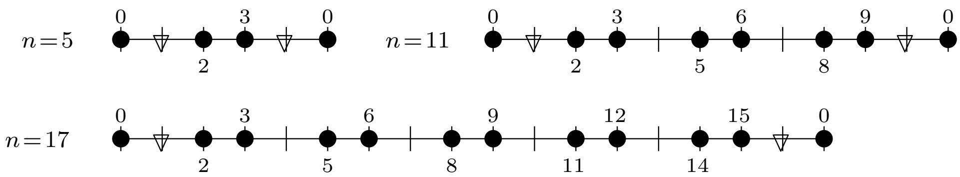
$2k-1$ 以下の相異なる非負整数を，どの 2 つの和も $2k-1$ にならないように k 個選んだ局面 $[a|b|c|\ldots]_k$ のことで，細長ボードの $2k-1$ 番までのマスに k 個のコインを，x にあるとき $2k-1-x$ にはないように置いた Welter のゲームの局面と同じである.

なお，図 15.11 の中国式算盤は奇妙な図で，五珠と一珠を分ける横木がない．恐らく著者の不確かな印象に基づく図であろう．

訳書 p.547（原著 p.517） Kotzig の環状ニム（$n \equiv 5 \pmod 6$ のとき）

第 2 プレーヤーの基本戦略は，互いに手 $m=3$ を続けて $n-2$ にコインを置いた後（コイン $n-2$ と 0 は次の周回の壁になる），第 1 プレーヤの手にかかわらず 2 にコインを置く．2 周目は必然的に $m=3$ の手が続き $n-3$ にコインが置かれて第 2 プレヤーは壁に阻まれる．もし第 1 プレーヤが手 $m=1$ を打てば同じ手を打ち，そこにできた壁を使う戦略に変更して決着を早めることができる．なお，原著では 1 周目の終わりにコインを置く位置が第 1 プレーヤーが $n-1$ ならば 2，第 1 プレーヤーが 1 ならば 4 と書かれていたが，第 2 プレーヤは常に 2 で良い．

例　（▽ は第 1 プレーヤーの選択対象）



訳書 p.547（原著 p.517）　フィボナッチニムの必勝法

Zeckendorf 表現を繰り返し利用するときは，直前の手の制約を受けることに注意．

例えば初期局面を $n=19$ とすると，$19=13+5+1$ により 6 個取れば直ちに $\mathcal{P}$ 局面 $u_7=13$ に移るが，初期局面 $u_8=21$ から先手が $a=2$ に取ってこの局面 $n=19$ になった場合には，次の合法手 b は制約 $b \leq 2a$ を受けて，後手の必勝手は $b=1$ になる．次の局面 $n=18$ における先手 $a=1$ によってできる局面 $n=18-1=17$ でも同様で，後手の必勝手は $b=1$ になる．それ以後先手 $a=1,2$ に対応する後手 $b=2,1$ によりようやく $\mathcal{P}$ 局面 $13=u_7$ に達することができる．したがって，20 または 19 から移行した局面 $n=18$，および 17 から移行した局面 $n=16$ も $\mathcal{P}$ 局面ということになる．

訳書 p.558,559（原著 p.527,538）　表 15.8〜10（王女とバラのゲーム表）の読み方

局面 $3^x2^y1^z$（x,y,z は花が 3 輪, 2 輪, 1 輪の木の本数）から 1 手で到達できる局面 $3^{x'}2^{y'}1^{z'}$ の z' を示す（上段は 1 輪取り，下段は 2 輪取り）.（1 本の木から 1 輪取るか，2 本の木から 1 輪ずつ取ることができる.）

$x'\backslash y'$	$y-2$	$y-1$	y	$y+1$	$y+2$
$x-2$					z
$x-1$			$z+1$	z $z-1$	
x	$z+2$	$z+1$ z	$z-1$ $z-2$		

例として，局面 $3^2 2^2 1^2$ からの移動可能な局面 $3^{x'} 2^{y'} 1^{z'}$ と周辺の $\mathcal{P}$ 局面の数列 z を示す.

$x'\backslash y'$	0	1	2	3	4
0					2
1			3	$2,1$	
2	4	$3,2$	$1,0$		

	0	1	2	3	4
0	$(0,3,..)$	$(0,4,..)$	$(0,5,..)$	$(0,3,..)$	$(0,4,..)$
1	$(2,6,..)$	$(4,7,..)$	$(2,5,..)$	$(3,6,..)$	
2	$(1,6,..)$	$(4,7,..)$	$(2,5,..)$		

これより $\mathcal{P}$ 局面 $3^2 2^2 1^2$ における敵の手に対して $\mathcal{P}$ 局面に戻す手がわかる（$\rightarrow$ の先が $\mathcal{P}$ 局面）.

$x'\backslash y'$	0	1	2	3	4
0					$2 \rightarrow 3^0 2^4 1^0$
1			$3 \rightarrow 3^1 2^2 1^2$	$2,1 \rightarrow 3^1 2^2 1^2$	
2	$4 \rightarrow 3^1 2^1 1^4$	$3 \rightarrow 3^0 2^3 1^3$ $2 \rightarrow 3^1 2^2 1^2$	$1 \rightarrow 3^1 2^2 1^2$ $0 \rightarrow 3^0 2^4 1^0$		

訳書 p.560（原著 p.529）　ワンステップ・ツーステップ

「ワンステップ・ツーステップ」という名前付けをよく考えると，ワンステップしてから次のツーステップというのは，ワンステップしたときのマスより前にある位置のマスからステップするという動作を表現しているものと考えれば，同じマスの 2 枚のコインを一つ左へ進めることは許されていない．とすれば，同じ木からバラを 2 つ取るということは禁止されている王女とバラのルールと符合することになる.

王女とバラの図にある，$8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, 7 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5, 5 = a_3 + a_4 + a_5, 3 = a_4 + a_5, 1 = a_5$ 個の花のならびは，ワンステップ・ツーステップでは $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 1$ となっていて，王女とバラの図で，左から 2 番目と 3 番目の木からバラを 1 つずつ取る手は 8, 6, 4, 3, 1 となり，ワンステップ・ツーステップでは 2, 2, 1, 2, 1 となる．3 マス目の同一コインをワンステップ・ツーステップで動かしているとも，それぞれのマスから別々のコインを左に 1 ずつ動かしているともとれる.（2,0,3,2,1 を 3,0,2,2,1 にするときは，3 マス目のコイ

ンを続けて 1 マス目に移すが，王女とバラでは 8,6,6,3,1 から 8,5,5,3,1 に変化するので問題がない．むしろ，2,0,3,2,1 から 3 マス目の 2 枚のコインを 2 マス目に移して，2,2,1,2,1 にするのは，王女とバラでは 8,6,6,3,1 から 8,6,4,3,1 に変化するので許容されない．）

3.3　第 16 章　点と箱

訳書 p.573（原著 p.541）　褒賞手とボーナス手

日常語では褒賞とボーナスは同義なので紛らわしいが，本書では厳密に使い分けている．　褒賞手は箱を完成する手，ボーナス手は褒賞手の次に打つべき手である．

訳書 p.574（原著 p.542）　箱の鎖を開く

「鎖（chain)」は陽に定義されないまま，次々に意味が拡張される．

点と箱ゲームにおける鎖は，隣接した未完成の箱 (箱の 2 辺に線を引いた状態) の列である（図 16.4 の左図）．それらの未完成の箱の個数を鎖の長さといい，長さ 3 以上の鎖を長いという．鎖の中の 1 辺に線を引くことを鎖を開く（open）という．鎖が開かれると次に鎖の中で箱を完成する褒賞手が生じ，そのボーナス手が同時に褒賞手になって箱の完成ラッシュが起こる．このラッシュが策略手によって中断されると，短くなった鎖が開かれた状態で残される．

点と箱を紐とコインに翻訳すると，箱の鎖は紐で繋がれたコインの列となり，やはり鎖と呼ばれる．箱の鎖の両端は開放されているだけだが，コインの鎖の両端の紐は矢印で表され，「地面」と繋がるものとされる（矢印の先端が地面に当たる，図 16.14(b)）．鎖の紐を 1 本切断すると，鎖が開かれて獲得可能なコインが発生し，そのコインを取る手が褒賞手である．ボーナス手，策略手，鎖の長さも点と箱のそれらに対応する．

ニム紐ゲームでは紐とコインの鎖が一般化されて，鎖の長さは 0 でもよい（図 16.21）．また，鎖の端点は地面に限定されずに，結合点（3 つ以上の辺をもつ節点）でもよい（図 16.22，図 16.25）．例えば，つる草の巻きひげは結合点と終端点（地面）を結ぶ鎖である．

訳書 p.576 （原著 p.545）　主導権

原著の用語は control である．ゲームを支配するという意味で「主導権」と訳すことにした．第 21 章で異なる用語 opposition にも同じ用語を用いることとした。誤解は生じないと思われる。

訳書 p.577（原著 p.545）ドディー (Dodie) とエヴィー (Evie)

著者は姉妹に，odd（奇数, 先手）と even（偶数, 後手）を連想させる名前を付けた．

訳書 p.579（原著 p.547）　囲みの中「2 対 2 は後手の勝ち」

原著の表現は Two twos is a win to two. で，tu の語呂合わせになっている．

訳書 p.579（原著 p.548）　プロボクサー（professional boxer）

英語 box に因むことば遊びを受けて，Box 作り職人と訳した．

訳書 p.579（原著 p.547）　4 箱ゲーム

本文に「鎖の長さが，長さ 4 のループ，2+2，1+1+1+1 ならば長い鎖のルールに従って，勝者はエヴィーとなる」とあるが，エヴィーが勝つ理由は長い鎖のルールではない．「長い鎖のルール」は主導権をとるための心得であって，長い鎖が 1 個以上ありループがないときに適用される．常に基本となるのは付録（p.603）に示された法則「点の数＋ハマリ手の数＝手番数」である．4 箱ゲームでは長さ 4 のループを除きハマリ手はない．各ゲーム進行に応じて勝つ理由は以下のように分かれる．

(1) 長さ 4 のループでエヴィー（後手）が勝つのは，長さ 4 のループがハマリ手をもつので手番数が 9+1=10 となり，最終プレーヤーとして 4 箱獲れるからである．

(2) 鎖の長さが 2+2，1+1+1+1 のときも長い鎖のルールは適用外であり，このときエヴィーが勝つのは手番数が 9 で，「2 対 2 は後手の勝ち」というルールによる．

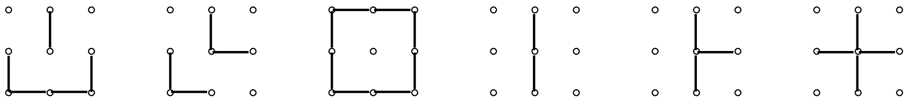
(3) 鎖の長さが 4，3+1 のときにドディーが勝つのは，まさしく長い鎖のルールによる．

(4) 鎖の長さが 2+1+1 のとき，長い鎖のルールは適用外で，ドディーが勝つのは総手番数が 9 で，最後の 2 箱と最初の 1 箱を獲ることができるからである．この事実は「ドディーは，しばしばこのルールではなく，鎖を 2+1+1 に分割して勝利する」と記されている．

ゲームは，鎖の長さの組合せで次のように分類されている：

長い鎖を含む	手数	手番数	勝者と箱数	短い鎖のみ	手数	手番数	勝者と箱数
4	7	9	先手 (4:0)	$2+2$	6	9	後手 (2:2)
$3+1$	6	9	先手 (3:1)	$2+1+1$	5	9	先手 (3:1)
長さ 4 のループ	8	10	後手 (0:4)	$1+1+1+1$	4	9	後手 (2:2)

手数とは各局面に達するまでの手数を表す．手数が偶数（奇数）ならば最初に鎖を開くのは先手（後手）になる．



訳書 p.580（原著 p.548）　図 16.9 の中の説明文「ドディーからの危険な贈り物」
　英語表記では，d で韻を踏むことば遊び（Dodie's do or die donation）になっている．do or die は「必死の覚悟でやる.」この局面は図 16.35 にある 7 手目の $\mathcal{P}$ 局面で，エヴィーは贈り物を喜べない（箱を取っても取らなくても負け）.

訳書 p.581（原著 p.549）　9 箱ゲーム
　卍（マンジ, swastika pattern）が「お守り」（Lucky Charms）になって，長い鎖が 1 個だけ形成される．点の数 (16) ＋長い鎖の数 (1) が奇数になるのでエヴィ（後手）の勝ち.

訳書 p.592（原著 p.561）　サーキット
　ループと同じ閉路の意味であるが，訳語は英語にならって別の用語になる.

訳書 p.594（原著 p.562）　変異，変異種
　著者があえて mutation という生物学，医学の用語を使っているので，それに沿った訳語を考えた．また，mutation を mutant の意味で使うときは変異種とした.

訳書 p.595（原著 p.563）　図 16.25 の見出し「長い鎖の端点 C を通る」
　鎖の定義は拡張され，鎖の終端点が他のパスの結合点になっている.

訳書 p.596（原著 p.564）　つる草の定義
　つる草とは，サーキットも獲得可能な節点ももたないニム紐グラフで，そのすべての結合点が単一の長いパス（茎と呼ぶ）上にあり，どの結合点も 3 つ以上の辺に属しているものをいう.
　本文に「結合点にちょうど 3 つの辺がつく」とある表現を上記のように訂正する（図 16.38 には十字結合点がある).

訳書 p.598（原著 p.566）　原著の図 16.27 の修正
　右から 3 番目と 4 番目の結合点の間に節点を 1 個追加（それがないと，右から 2 番目と 4 番目の結合点の間が短く，ツッピンつる草にならないから).

訳書 p.598（原著 p.566）　原著の図 16.28 の修正

右から 2 番目と 3 番目の結合点の間に接点を 1 個追加（図 16.27 の修正理由に同じ）

訳書 p.603（原著 p.571）　オイラーの定理

オイラーの定理は複数あるので，ここは「オイラーの多面体定理」とする．証明に新鮮味がある．

肝心の命題「手番数 T ＝点の数 D ＋ハマリ手の数 H」が説明不足なので補う．$H = 0$ のとき $T = D$ に基づく．ハマリ手 1 手で箱が 2 つできるがボーナスは 1 手だから，手番で引く線の数が 1 つ増える．ハマリ手が H 個あれば手番で引く線の数 T は D より H だけ増える．つまり，$T = D + H$ となる．

訳書 p.604（原著 p.572）　原著の図 16.34 の修正

訳書では，第 3 段から第 4 段への遷移可能な線を 3 本追加した．

訳書 p.605（原著 p.573）　原著の図 16.35 の修正

原著の 3 手目の最初の $\mathcal{P}$ 局面は誤りであったので除去し，その位置に新しく $\mathcal{P}$ 局面（図 16.34 の 3 手目の真ん中と同じもの）を挿入した．

訳書 p.605（原著 p.573）　原著の図 16.35 の修正

原著の 5 手目の $\mathcal{P}$ 局面において，第 1 行第 2 列目の図と第 2 行第 1 列目の図にそれぞれ太いたて線を追加した．

訳書 p.605（原著 p.573）　原著の図 16.36 の修正

左端の図において，右上の節点から斜め下に短い太線を追加した．

訳書 p.606（原著 p.574）　$D = (a-4)+(b-4)+(c-4)+\cdots+4$ の理由

バーサの戦術だから，長さ a の鎖に対して自分は $a-2$ 個とり，相手に 2 個与えるので，相手より $(a-2)-2 = a-4$ 個だけ多い．他も同様だが最後は全部とるので 4 を戻して上の式を得る．

3.4　第 17 章 スポットとスプラウト

訳書 p.620（原著 p.586）　ループと枝

　第 4 章の表 4.6 には直接，ゲーム ·73 の記載はないが，「表 4.6 に対するゲーム探索表」にゲーム ·26 参照の指示があり，そこにニム列 $\dot{1}23\dot{0}$ が載っている．

訳書 p.623（原著 p.589）　ルーカスタの表 17.4 の確認のために

　局面 (a,b,c) が次の 5 つのタイプの $\mathcal{P}$ 局面であるとき，敵のあらゆる手に対して，$\mathcal{P}$ 局面に戻すための応手と変化後の局面 (a',b',c') を示す．

	$(0,b,0)$	$(1+4k,b,0)$	$(3,2m,1)$	$(4+2k,2m,0)$	$(0,2m,2)$
aa	$-$	$(4k-1,b+1,0)$	$(1,2m+1,1)$	$(2+2k,2m+1,0)$	$-$
応手	$-$	$aa\,(4k-3,b+2,0)$	$ab\,(0,2m,2)$	$\begin{cases} ab\,(3,2m,1)\ (k=1) \\ aa\,(2k,2m+2,0)\ (k\neq 1) \end{cases}$	$-$
ab	$-$	$(4k,b-1,1)$	$(2,2m-1,2)$	$(3+2k,2m-1,1)$	$-$
応手	$-$	$c!\ \begin{matrix}(0,b-1,0)\\+(4k,0,0)\end{matrix}$	$aa\,(0,2m,2)$	表 17.5	$-$
bb	$(0,b-2,1)$	$(1+4k,b-2,1)$	$(3,2m-2,2)$	$(4+2k,2m-2,1)$	$(0,2m-2,3)$
応手	$c!!\,(0,b-2,0)$	$c!!\,(1+4k,b-2,0)$	$c!!\,(3,2m-2,1)$	$c!!\,(4+2k,2m-2,0)$	$c!!\,(0,2m-2,2)$
ac	$-$	$-$	$(2,2m,1)$	$-$	$-$
応手	$-$	$-$	表 17.5	$-$	$-$
bc	$-$	$-$	$(3,2m-1,1)$	$-$	$(0,2m-1,2)$
応手	$-$	$-$	$bc\,(3,2m-2,1)$	$-$	$bc\,(0,2m-2,2)$
$c!$	$-$	$-$	$(a,b,0)+(a',b',0)$	$-$	$(0,b,1)+(0,b',0)$
応手	$-$	$-$		$-$	

ルーカスタの $\mathcal{P}$ 局面における応手対

訳書 p.624（原著 p.589）　$(a,b,c)=(0,2m,2)$ が $\mathcal{P}$ 局面であることの確認．

　敵のすべての手 $bb, bc, c!$ に対して $\mathcal{P}$ 局面に戻す手があることを示す．

(1) bb に対しては $c!!$ でその鎖をすっきり取り除く．

　$(0,2m,2) \xrightarrow{bb} (0,2m-2,3) \xrightarrow{c!!} (0,2m-2,2)$

　m は 2 ずつ減少して最終的に，$(0,0,2) \xrightarrow{c!} (0,0,1) \xrightarrow{c!!} (0,0,0)$

(2) bc には bc で対抗する．$(0,2m,2) \xrightarrow{bc} (0,2m-1,2) \xrightarrow{bc} (0,2m-2,2)$

(3) $c!(b^k)$ には $c!!$ で対抗する．（$\mathcal{P}$ 局面の和は再び $\mathcal{P}$ 局面の和にできる）

　$(0,2m,2) \xrightarrow{c!(b^k)} (0,2m-k,1)+(0,k,0) \xrightarrow{c!!} (0,2m-k,0)+(0,k,0)$

訳書 p.630（原著 p.596）　表 17.9

局面 $G=(a,b,c)$ の属性を $g^{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3}$ で表す（g は G の標準値 $\mathcal{G}^+(G)$，γ_0 は G のミゼール値 $\mathcal{G}^-(G)$，$\gamma_j\,(j=1,2,3)$ はそれぞれ $G+2$, $G+2+2$, $G+2+2+2$ のミゼール値，属性については第 13 章, p.449 を参照）．構造は G の選択肢の簡略形で，$\{x+m, y+n, z\}$ は $x_m y_n z$，選択肢が単独 x のときは x_+ で表す．以下にいくつか例を示す．

1) $(0,0,c)$ の選択肢は $\{(0,0,x)+(0,0,y)\,|\,x+y=c-1\}$ で，$g=\mathrm{mex}(\mathcal{G}^+(0,0,x)+\mathcal{G}^+(0,0,y))$ であるから帰納法により c が奇数のとき $g=0$，偶数のとき $g=1$．

2) $(0,2,3)$ の選択肢は

$\{(0,0,4),(0,1,3),(0,2,2),(0,1,2)+(0,1,0),(0,0,2)+(0,2,0),(0,1,1)+(0,1,1),(0,0,1)+(0,2,1)\}=2_2320=a$（下部の表を参照）．

3) $(0,3,0)$ の選択肢は $\{(0,1,1)\}=\{2\}$ であるから，$(0,3,0)$ の属性は $\{2\}=2_+$．

4) $(0,4,1)=\{(0,2,2),(0,3,1),(0,4,0),(0,3,0)+(0,1,0),(0,2,0)+(0,2,0)\}$
$=2_+20=e$（下部の表を参照）．

訳書 p.636（原著 p.602）　パリサイの個数

図 17.10 に関して，原著には「現時点で 1 個のパリサイ P を持っており」と書かれていたが，実はパリサイは次に示す 2 個存在する．訳本ではそれに伴う修正も行った．

領域 A の厳密な内部と領域 A, C の境界上に，生きたスポットに最も近い死んだスポットが 2 個あり，領域 A, B, C の境界上で対称の位置にあるスポット 2 個がパリサイとなる．

訳書 p.638（原著 p.603）　星と条

この節の表題は，アメリカ合衆国の “星条旗” が念頭にある（The Stars and Stripes Forever）．

領域の内部の連結部分とは領域の境界を含む曲線部，およびそれらと交わらない曲線部（または孤立点）を意味する．領域は連結部分と同じ個数の星を含む（図

17.12(b))．手を進めると領域が分割され，領域内の星の個数が減少する．星が 1 個の領域で行うゲームは $\mathbf{4}\cdot\mathbf{07}$（ループと枝 $\cdot\mathbf{73}$ のいとこ）になり，星の腕が n 本のときのニム値は，$A=\{\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(b)\,|\,a+b=n\,(a,b>0)\}\cup\{\mathcal{G}(a)\overset{*}{+}\mathcal{G}(b)\,|\,a+b=n-2\,(a,b\geq 0)\}$ とすれば，$\mathcal{G}(n)=\operatorname{mex}A$ である（初期値 $\mathcal{G}(0)=\mathcal{G}(1)=0$）．

参考　8 進ゲームの標準形：$\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$．$\mathbf{d}_k$ は 1 つの山から k 個の豆を除去して，a 山に分割可能なとき 2^a を加算する（$a=0$ は取り除くこと，$a=1$ は分割しないこと，$a=2$ は 2 つの山に分割することを表す）．ニムは $\cdot\mathbf{3333}\cdots=\cdot\dot{\mathbf{3}}$，ケイルスは $\cdot\mathbf{7700}\cdots=\cdot\mathbf{77}$ である．豆を除去せずに分割するゲームは $\mathbf{4}\cdot\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\cdots$ で表す（4 章 p.111）．

訳書 p.639（原著 p.604）　ブッシェンハック（Buchenhack）

ハッケンブッシュ（Hackenbush）のアナグラム．

訳書 p.640（原著 p.604）　変化集合

第 7 章第 24 節をみよ．

訳書 p.640（原著 p.606）　ブッシェンハックと遺伝コード

ブッシェンハックの必勝法を求めるには，ニム値の他に遺伝コードが必要になる．局面のニム値 a と遺伝コード A の対を $a_{[A]}$ で表す（$[A]$ は変化集合）．遺伝コードの次の性質は注目に値する．

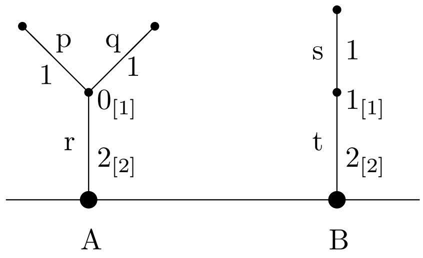
(1) 局面 a の遺伝コード A は局面 a から移行可能な局面のニム値の異なり個数と一致し，移行可能な局面のニム値の集合 S_a は $a\overset{*}{+}[A]$ である（当然，$a=\operatorname{mex}S_a$）．

(2) 局面 $a_{[A]}$ と $b_{[B]}$ の和 $a+b$ のニム値は $a\overset{*}{+}b=x$ で，その遺伝コードは，$[A]\cup[B]=[X]$ となる自然数 X である．$a+b$ から移行可能な局面のニム値の集合 S_{a+b} は $x\overset{*}{+}[X]$ となる：

$$\begin{aligned}S_{a+b}&=\bigl(S_a\overset{*}{+}b\bigr)\cup\bigl(a\overset{*}{+}S_b\bigr)=\bigl((a\overset{*}{+}[A])\overset{*}{+}b\bigr)\cup\bigl(a\overset{*}{+}(b\overset{*}{+}[B])\bigr)\\&=(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}([A]\cup[B])=x\overset{*}{+}[X].\end{aligned}$$

例えば，図 17.14 のブッシェンハック（ニム値 $1\overset{*}{+}5\overset{*}{+}2=7$）において，図 17.13 に示された必勝手を打った後の局面の値は，確かに $1\overset{*}{+}(0\overset{*}{+}1\overset{*}{+}2)\overset{*}{+}2=0$ となる．

参考までに単純な例を示す．下図の 2 つの根付き木 A, B は異なるが，それぞれの根における情報 $2_{[2]}$ は一致するので，ブッシェンハックとして和ゲーム A + B は $\mathcal{P}$ 局面 $0_{[2]}$ となる．



相手の手	局面	局面の値	応じ手	局面	局面の値
枝 p を刈る	q+B	$1_{[1]} \overset{*}{+} 2_{[2]} = 3_{[3]}$	枝 t を刈る	q+s	$1_{[1]} \overset{*}{+} 1_{[1]} = 0_{[1]}$
幹 r を刈る	(p+q)+B	$0_{[1]} \overset{*}{+} 2_{[2]} = 2_{[2]}$	枝 s を刈る	p+q	$1_{[1]} \overset{*}{+} 1_{[1]} = 0_{[1]}$
枝 s を刈る	A	$2_{[2]} \overset{*}{+} 0_{[0]} = 2_{[2]}$	幹 r を刈る	p+q	$1_{[1]} \overset{*}{+} 1_{[1]} = 0_{[1]}$
枝 t を刈る	A+s	$2_{[2]} \overset{*}{+} 1_{[1]} = 3_{[3]}$	枝 p を刈る	q+s	$1_{[1]} \overset{*}{+} 1_{[1]} = 0_{[1]}$

ちなみに，緑ハッケンブッシュとしての A+B は p を刈ると $\mathcal{P}$ 局面になるから $\mathcal{N}$ 局面である．

3.5　第 18 章　皇帝とマネー

訳書 p.647（原著 p.611）　第 3 節「第 2 章の付録で与えた証明」とは

第 1 巻 p.53 の必勝戦略の存在証明のこと．

訳書 p.648（原著 p.612）　局面 $\{4, 5, 11\}$ という表記

「$\{4, 5, 11\}$ は $\mathcal{P}$ 局面である」のように，このゲームでは唱えられた数の列を局面とよぶ．局面 $\{a, b, c\}$ では a, b, c の順序に意味があり，$\{16, 24, 3\}$ は合法であるが，$\{3, 16, 24\}$ は非合法である．通常，局面は選択肢の集合で表現されるが，このゲームでは図 18.3 のような表を作らないと選択肢がわからない．

訳書 p.650（原著 p.613）　クリーク技法

クリーク技法とは，ある局面において合法的な手（唱えることのできる数）の集合を分割し，クリークと呼ばれる応手対 (x, y) や好手 z からなる部分集合を確定する手法である．応手対とは先手がその一方を打つとき後手が他方を打てば $\mathcal{P}$ 局面に移行できる手の対，好手とは先手が $\mathcal{P}$ 局面に移行できる手を意味する．

図 18.3 の局面 $\{6, 7\}$ の例では，クリーク $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$ が確定した後に，$\{8, 9, 10, 11\}$ が第 4 のクリークをなすことが説明されている．

ここで，第 5 クリークが $\{15, 16, 17\}$ ではないことを示す．好手 16 は 15,17 以外の 22 以上の数を排除し，対 $(15, 17)$ は 16 以外の 22 以上の数を排除するので，$\{15, 16, 17\}$ がクリークの条件を満たすように見えるが，先手が好手 16 を打ち損じた場合に後手は $\mathcal{P}$ 局面に移行させる応手対をもたないからである．

局面 $\{6, 7\}$ の正しい第 5 クリークは $\{15, 16, 17, 22, 23\}$ であり，それを応手対と好手で表したものが $(15, 23)(17, 22)16!$ である．局面 $\{6, 7\}$ における完全なクリーク分割は，記号] でクリークを区切って，

$$1?](2, 3)](4, 5)](8, 10)(9, 11)](15, 23)(17, 22)16!]29?$$

で表される（1? と 29? は悪手である）．

この章の記述では，好手が得られたときに分割作業を終わることが多い．

訳書 p.655（原著 p.617）　静かな終局

節のタイトルでは「静かな終局（Quet Ends)」だが，本文にあるように「静かな終局面（quet end-position)」と解するべきであろう．

2 手の局面 $\{a,b\}$ には静かでない終局面は存在しない（図 18.5 の議論）．図 18.4 の局面 $\{7,10,12\}$ は「静かでない終局面」の例になっている（$s=2,9,16,23$ はいずれも $t=25$ を静かに排除しない：$25=2\cdot2+3\cdot7$, $25=9\cdot2+7$）．

訳書 p.672（原著 p.632）　ジグザク

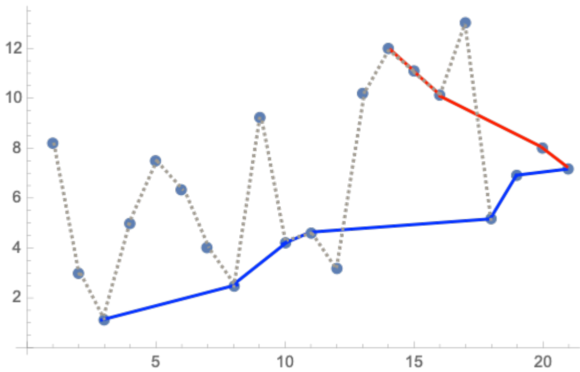
(a,b)-ジグザグゲーム

このゲームではプレーヤーは交互に以前に唱えられたのとは異なる数を唱える。そのときまでに唱えられた数列の中に長さが a を越える最長単調増加部分列（ジグ）か、長さが b を越える最長単調減少部分列（ザグ）を作ってしまったプレーヤーが敗者となる．

(7,5)-ジグザグゲームの一例：

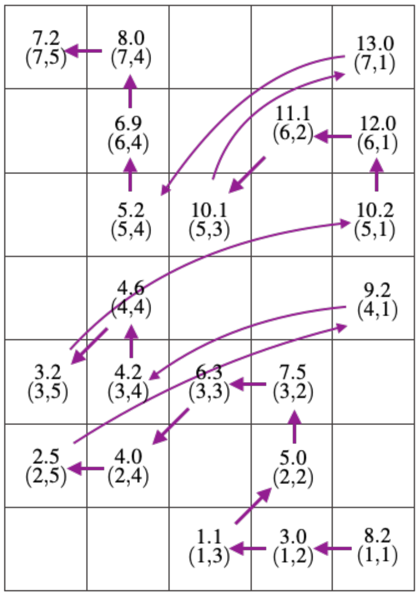
ジグ 7 ザグ 5 に達した後はどのような数を唱えてもジグまたはザグの長さを大きくしてしまうので、この例では後手の負けとなる．

{8.2, 3.0, 1.1, 5.0, 7.5, 6.3, 4.0, 2.5, 9.2, 4.2, 4.6, 3.2, 10.2, 12.0, 11.1, 10.1, 13.0, 5.2, 6.9, 8.0, 7.2}

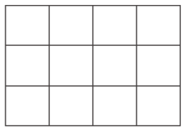


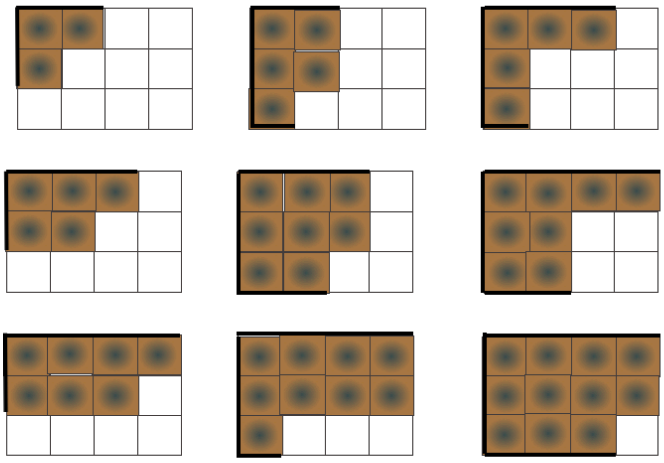
今唱えられた数に至る最大単調増加列（ジグ）の長さが r で，最大単調減少列（ザグ）の長さが s であるとき，セル (r,s) が食べられたと考える．前の例で，かじられたセルがどのように推移したかは以下の図に示されている．

セル (7,5) をかじったプレーヤーが勝者である．



(3,4)-ジグザグゲームの $\mathscr{P}$ 局面



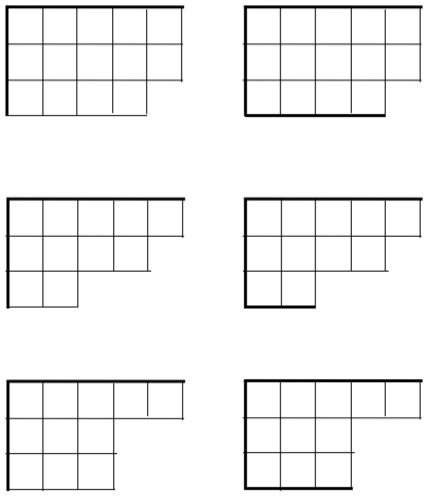


(5,7)-ジグザグゲームの $\mathcal{P}$ 局面は 164 個存在する．

境界に注意：

同じ形に齧られた板チョコレートでも最初の大きさによって齧れるセルが異なることがある．

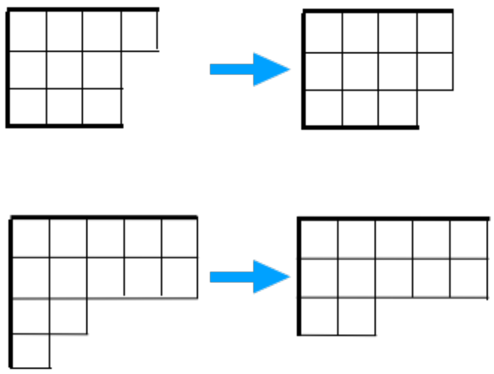
$\mathscr{N}$ 局面　　　　$\mathscr{P}$ 局面



訳書 p.672（原著 p.634）　原著の図 18.13 の修正

図の中央の説明文「そして，毒のあるマスを通る対角線に関して対称である」を「そして，マス (a, b) を通る対角線に関して対称な形も $\mathcal{P}$ 局面である」に修正する（正誤表参照）．

図の 3 段目にある次の 2 つの $\mathcal{P}$ 局面は矢印右のように修正する（正誤表参照）：

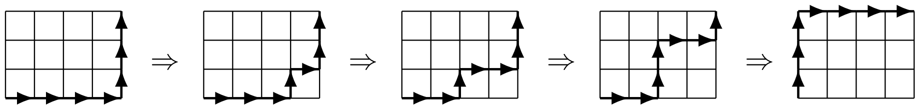


訳書 p.672（原著 p.635）　ジグザクゲームの幾何学的ゲームやコイン並び替えゲームへの変換

板チョコ $a \times b$ の齧られた形は単位長さの右矢印 $\rightarrow$ と上矢印 $\uparrow$ の列によって記述できる．

右矢印を表コイン，上矢印を裏コインと見ればコインの並べ替えゲームに変換される．

例　$a = 3, b = 4$ のとき



初期状態　第 1 手目　第 2 手目　第 3 手目　最終状態

→→→→↑↑↑　→→→↑→↑↑　→→↑→→↑↑　→→↑↑→→↑　↑↑↑→→→→

さらに裏コインは空マスで表コインだけ（あるいは，表コインは空マスで裏コインだけ）を動かすゲームにも変換できる．

ジグザグゲームと等価になるように各ゲームの詳しいルールを考えるのは読者に委ねたい．

訳書 p.674（原著 p.636）　原著の表 18.6 の修正

この翻訳ノートの「クリーク技法」に関する考察を踏まえると，以下の修正が適切であると考えられる：

(1) $\{5, 7\}$ について．(4,6) の直後に区切り ］を挿入する．

(2) $\{6, 7\}$ について．(2,3) の直後に区切り ］を挿入した（修正済み）．

(3) $\{7, 9\}$ について．19!24! の後に 31? を追加するとわかりやすい．

(4) 同．注記 $\{7, 9, 22, 26\}$ の後 (15,20) を $(12, 15)(12, 20)$ に修正する．

(5) 同．注記 $\{7, 9, 29, 33\}$ の最後の ... は削除する．

3.6　第 19 章　チェス碁

訳書 p.681（原著 p.641）　章のタイトル

原著では「王様と消費者（The King and the Consumer)」であったが，消費者の意味が分かりにくいので，章の内容を直接的に表す「チェス碁」とした．

訳書 p.681, 2（原著 p.641, 2）　チャスとジオ（プレーヤーの名前）

英語では Chas., Geo. であるが，何の省略形かはわからない．チャスはデューク碁，キング碁ではそれぞれ直接，デューク，キングと呼ばれる．Chas. はチェス駒，Geo. は碁石を連想させる．

訳書 p.682（原著 p.642）　チェス碁の勝敗

チェス駒がボードの縁に到達したらチャスの勝ち，チェス駒が動けなくなったらジオの勝ち，ゲームが無限に続くならドロー．

訳書 p.682（原著 p.642）　「クァドラファージ」

「不動石だけのキング碁」と同じ．「マスを食う」ことは不動石を置くことに相当する．ラテン語 quadraphage の quadr は 4（四角形），phage は食べるを意味する．

訳書 p.682（原著 p.642）　「公平な位置（公平なゲーム)」の定義

公平な位置とは先手が勝つ開始位置をいう， と定義されている．ところが，...

四半無限ボード上のデューク碁の公平な位置は $(3, x)$, $(x, 3), (x \geq 3)$ とあるが，ジオが先手のときドローにできるが，勝つわけではない（p.684, 図 19.4)．また，四半無限ボード上のキング碁の公平な位置は $(9, x)$, $(x, 9), (x \geq 9)$ とあるが，ジオが先手のときドローにできるが，やはり勝つわけではない（p.697, 図 19.19)．ボードが無限のとき，ドローを勝ちとみなすのか？

訳書 p.690（原著 p.649）　原著の図 19.12 の修正

L 列の第 4 ランクが km となっていたのを klm に修正した．

訳書 p.702（原著 p.663）　6.12 節の最後の文．

図 19.26 の第 1 ランクの黒石は左から，②, ④, ③, ① である．数字が見えないので分かりづらくなっている．

3.7 第 20 章　狐とガチョウ

訳書 p.712（原著 p.670）　節のタイトル「われわれお気に入りのガチョウたちのための戦略」

原著にはない節を設けた．この章の導入部がかなり長いことと，この部分に有限ボードにおけるガチョウの必勝戦略が記されていることによる．

訳書 p.716（原著 p.674）　図 20.7(c)

原著にはなかった色付けをした．青はガチョウ，赤は狐に対応する．

訳書 p.717（原著 p.674）　無限ボード

“狐がガチョウたちのいる最も上の行に達したとき，その値は **off** である”

において，値を **dud** でなく **off** とした心は次の通り．上下方向に無限としたボードなら，狐がガチョウたちのいる最も上の行にいる状態では，狐は自由に動き回れるし，ガチョウも下へ下へと動けるわけで，**dud** が本来の状態なのだが，これを狐だけが動ける — $\mathbf{off} = \{\ \ |\mathbf{off}\}$（訳書 2 巻 p.355) — としたのは，狐が脱出に成功してガチョウの手無しと約束したということだ．この場合，ドローは狐の勝ちと定義したに等しい．このあたり，ガチョウは青で左手，狐は赤で右手であることを意識するべきであろう．

「生き残る」とは，狐を捕獲するか，狐を脱出させないでいつまでもガチョウが手を打ち続けることができること言っていると思う．無限のボードであれば，狐は脱出を諦めて下へ下へと逃げ続ければ捕獲されることはない．これはガチョウを「生き残らせる」ことになる．ガチョウを「生き残らせる」ことは狐の負けとは明記されていないようにも思う．

$\text{G\&F} \geq 1\,\mathbf{over}$ は $\text{G\&F} - 1\,\mathbf{over} \geq 0$, すなわち，$\text{G\&F} - 1\,\mathbf{over} < 0$ ではない．言い換えると，狐の勝ちではない（狐は脱出できない，ガチョウが生き残る）ということだと思う．(生き残るというのは勝利すると同じではない.)

第 7 節で $\text{F\&G} \geq 1\,\mathbf{over}$，第 8 節で $\text{F\&G} \leq 1\,\mathbf{over}$ が証明され，合わせて F&G

$= 1\,\mathbf{over}$ が導かれる．

訳書 p.717（原著 p.674）　バックフィールド（backfield）

バックフィールドは American football の用語で，ランニングバックが並び，クォーターバックがパスを投げるスクリメージライン後方のエリアを指す．この章では American football をイメージしながらゲームを論じているところがある．

訳書 p.717（原著 p.675）　青い花満開デルフィニウム

狐が最初にパスするまではガチョウは何回パスしてもよいが，狐が 1 度パスした後ではガチョウはパスすることができない，というルールが赤ハッケンブッシュで表現されている．

訳書 p.718（原著 p.677）　暗くする手，明るくする手

A2 で狐が B にいれば，ガチョウは hack（刈り込み）する．すると狐は hack するか，A に後退するかだが，hack すると後で 1 回しか hack できないので脱出できないだろう．A に後退しても多分だめなのだろう．

この「A2 で狐が B にいれば（暗い局面），ガチョウは hack する．すると狐は hack する」の後，ガチョウが B1 へ陣形（明るい局面，狐が灰色の行の D にいる）を移す．B1 で狐が hack すると（明るい局面のまま），ガチョウは D0 の局面へ移行する（暗い局面）．ここでは狐は□にいる（黒い行にいる）．B1 で狐が B に後退する（暗い局面）と，ガチョウは B0 へ陣形（明るい局面，狐が灰色の行の D にいる）を移す．ということが読み取れて，この解釈が図 20.10 の

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A2} \overset{\text{(hack)}}{\equiv\!=\!-} \mathrm{B1} & -\!=\!\equiv & \mathrm{D0} \\ \mathrm{B1} & \equiv\!=\!- & \mathrm{B0} \end{array}$$

を説明しきっていると思う．このように理解すると，狐の位置が黒い行か灰色の行かで暗い明るいを決めるということで話の辻褄があってくる．すなわち，狐の最初の位置だけでなく，その後の狐の位置を見れば明るい暗いの局面がわかるようになっている．

A2 で狐が黒い行の A にいれば（暗い局面），ガチョウは A1 の陣形をとり（明る

い局面，狐が灰色の行のダガーにいる)，次に狐は黒の行の A へと移動するはず．A2 で狐が灰色の行の A にいても（明るい局面)，ガチョウは A1 の陣形をとり（暗い局面，狐が黒の行にいる)，次に狐は灰色の行（上でも下でも）の A へと移動する．という意味で A2 === A1 は Both ということだ．

各節点でまずガチョウが着手し，狐が着手して終わる．この間に hack がありうる．いつでも狐がいる位置が明るい暗いを定めている．ガチョウが着手する前後で黒の行，灰色の行が交代するので，狐が動かなくても，明るい −=≡ 暗い，暗い ≡=− 明るい，の 2 つしか局面の変化はない．初めの狐の位置が暗いと明るい両方の可能性があると both となるわけだ．

「A2 で狐が B にいれば（暗い局面)，ガチョウは hack する．そして，狐が hack しなければ狐は B から動くはずで，ガチョウは局面を A1 へ移す．そしてガチョウは hack なしで A6 に至るとき，もし狐が B にいるときはガチョウにはまた hack が必要となるが，狐が一度も hack していないので十分な花弁が残っていてそれが可能なのである．

このあたりの議論で，ガチョウは青，狐は赤，すなわち，ガチョウが左手，狐は右手ということが明確に述べられていない．それを意識して読まないと理解はできない．図 20.7 の図 (c) に色付けしたのはその意味もある．

訳書 p.719（原著 p.676）原著の図 20.9 GOOSETAC の訂正（修正済み）

1) C6 において，⌣ に重なっていた D を除去した（C2 を参考）．

2) C4 において，⌣ に重なっていた C を除き，その右下に C を記入した（C8 を参考）．

訳書 p.726,7（原著 p.682,3）原著の図 20.15 FOXTAC の訂正（修正済み）

1) B1 において，○ の左上の C と右上の B を消去した．

2) B5 において，○ の右上の C と左上の B を消去した．

3) D1 において，○ の左上と右上の − を消去した．

4) D5 において，○ の左上と右上の − を消去した．

5) E2 において，○ の左上の − を消去した．

6) E6 において，○ の右上の – を消去した．

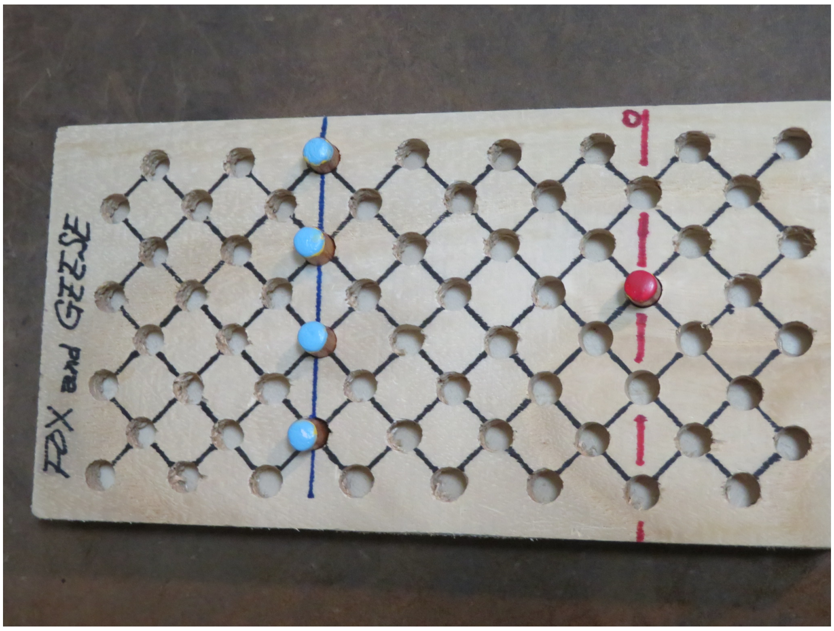
訳書 p.730（原著 p.688）　高さと高度

底辺のレベルを高さ 0 として鵞鳥の高さの総和を考える．高度は高さに狐の高さを加えたもの．ここでは狐が底辺にいるので高さと高度が一致する．

訳書 p.744, 745（原著 p.701）　*abc*

表の中の $5a, 3c$ などの文字を指しているが，*abc* には区切りがない．19 節のタイトルの *abc* には “初歩”（“イロハ”）の意味もあると思われる．

参考　「狐とガチョウ」のゲームボードを作ってみた．赤いペグが狐，空色のペグがガチョウたち，8 × 8 のチェスボードでの開始位置にセットされているが，多少の拡張は意図されている．



3.8 第 21 章　野ウサギと猟犬たち

訳書 p.755（原著 p.711）　第 1 節の表題「フランス軍の野ウサギ狩り」

French Military Hunt の訳．第 3 節によると，このゲームは 19 世紀にフランス軍の士官の間で流行ったことでこう呼ばれる．軍隊が野ウサギ狩りを行ったわけではない．

訳書 p.758（原著 p.714）　主導権

原著の用語は the opposition である．反対，対抗，対立という意味で使われている．対抗力，対応力などを充てることなど色々思案したが，最終的に，「主導権」と訳すことに落ち着いた．ゲームの性格から納得してもらえると思う．なお，既述のように第 16 章で同じ用語を control に対しても用いている．

訳書 p.761（原著 p.715）　第 6 節　野ウサギの「脱出」と「自由」

脱出の定義を簡潔に示し，例外があることを述べている．その例外として「野ウサギが四角マスにいて，その横あるいは前の八角マスに猟犬が直ちに移動できる場合」を挙げているが，厳密に考えるとこれでは不十分．読者には適当に補って読むことが要求されている．

なぜなら，（野ウサギ 1L, 猟犬 0R, 1R, 5）の場合，猟犬 1R は 2 に，猟犬 5 は 3L に，それぞれ直ちに移動できるが，野ウサギは空いている方に移動すれば脱出できる．また，（野ウサギ 1L, 猟犬 0R, 1C, 3L）の場合も，猟犬 3L は 2 に直ちに移動できるが，移動すると 3L に空きができるので野ウサギは脱出できる．

訳書 p.766，p.770　　脚注

原著の誤りを指摘する脚注を第 9 節と第 12 節に記した．

第 13 節のタイトルには「小ボードで猟犬が勝つ」と正しい事実を記し，表 21.1 には猟犬たちの必勝戦略を示しているにもかかわらず，それより前では「野ウサギが勝つ場合がある」と述べている．著者たちに何らかの思い違いがあったようだ．

第 9 節，第 12 節で猟犬たちが勝てないと誤認された局面（野ウサギ 4，猟犬 3L, 5, 3R）から始めた場合，3L の猟犬が 2 に進んだ局面は，図 21.14 の番号 1 の $\mathcal{P}$ 局面（猟犬が勝つ局面）であり，その遠隔数が 26 である（最短 26 手で終わる）ことも示されている．

訳書 p.767（原著 p.722）　第 10 節　中くらいの大きさと大きめのボード上で

「この議論を少し拡張すれば」の「この議論」とは，猟犬 1 匹を 8（小さいボードの 5 に対応）に残す戦略と思われる．どのように拡張するかは読者に委ねたい．

訳書 p.770（原著 p.725）　猟犬にとって確かな跳躍か？

英文では A Sound Bound for a Hound? という韻を踏んだ凝った表現になっている．猟犬 5 が 3R に跳ぶ手は適切であるが，猟犬 8 が 6R に飛ぶ手は野ウサギの反撃に会うので適切ではない．

訳書 p.772～3（原著 p.726～7）　図 21.14，図 21.15

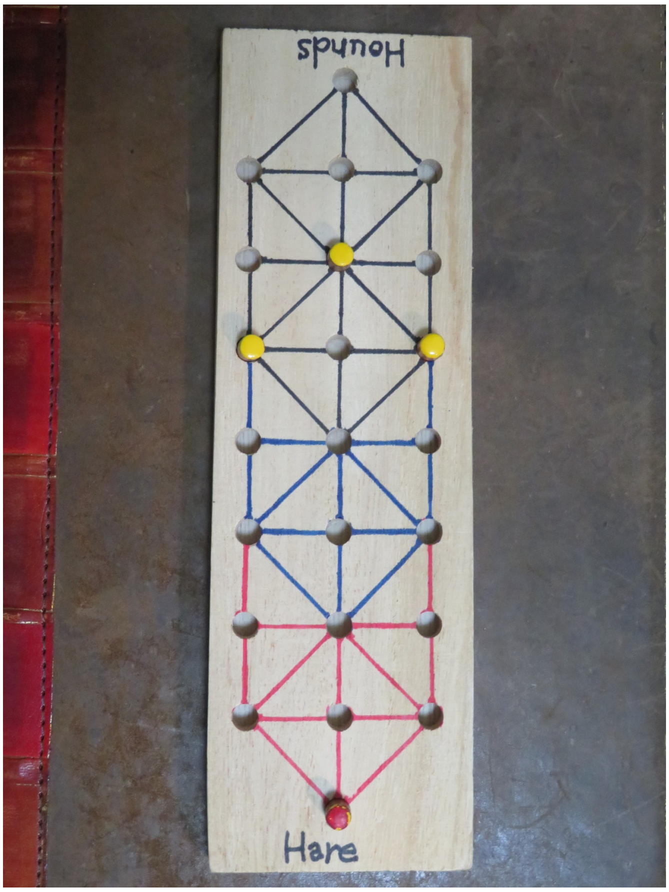
原著でこれらの図は，それまでの記述と上下が逆向きであったので，上下を反転した．

訳書 p.774（原著 p.728）　原著の表 21.1 の修正

図 21.14 の $\mathcal{P}$ 局面 3. における戦略が抜けていたので，表の 7 行目に挿入した．

また，野ウサギの開始位置が -1 の場合，猟犬たちには陣形 3,4,3 からの戦略もあるので，表の 2 行目第 2 列に -1 を挿入した．

参考　「野ウサギと猟犬たち」のゲームボードを作ってみた．赤いペグが野ウサギ，黄色のペグが猟犬たち，中ぐらいの大きさの初期位置にセットされている．


Hounds
Hare

3.9 第 22 章　直線と正方形

訳書 p.777（原著 p.731）　第 1 節の引用文

ティット・タット・トゥ（Tit-Tat-Toe, My First Go, Mother Goose Rhymes）

マザーグースに碁が出てきた！　「はじめての碁」と言っても，単に碁石を使ったということ．

訳書 p.778（原著 p.732）　**Hot**

9 個の単語を図 22.1 のマスに配置すると次のようになる．

HOT	FORM	WOES
TANK	HEAR	WASP
TIED	BRIM	SHIP

訳書 p.778（原著 p.732）　ジャム

このゲームをなぜ Jam（交通渋滞）と呼ぶか，理由は不明．それがティック・タック・トゥと同じという理由は図 22.4 (c) で理解できる．この言い換えは射影幾何でよく知られていて，点と直線とを読み換えると双対命題が得られることに対応する．

訳書 p.801（原著 p.753）　プットボール（Phutball）

Phutball は Philosopher+Football の造語で，発音はやはりフットボールに近いと思われるが，フットボールと区別するためにプットボールとした．

訳書 p.805（原著 p.756）　解答

9 個の単語を図 22.1 のマスに配置すると次のようになる．

count	foxy	words
and	stay	awake
using	lively	wit

単語を並べてできる文章に深い意味はなさそう．

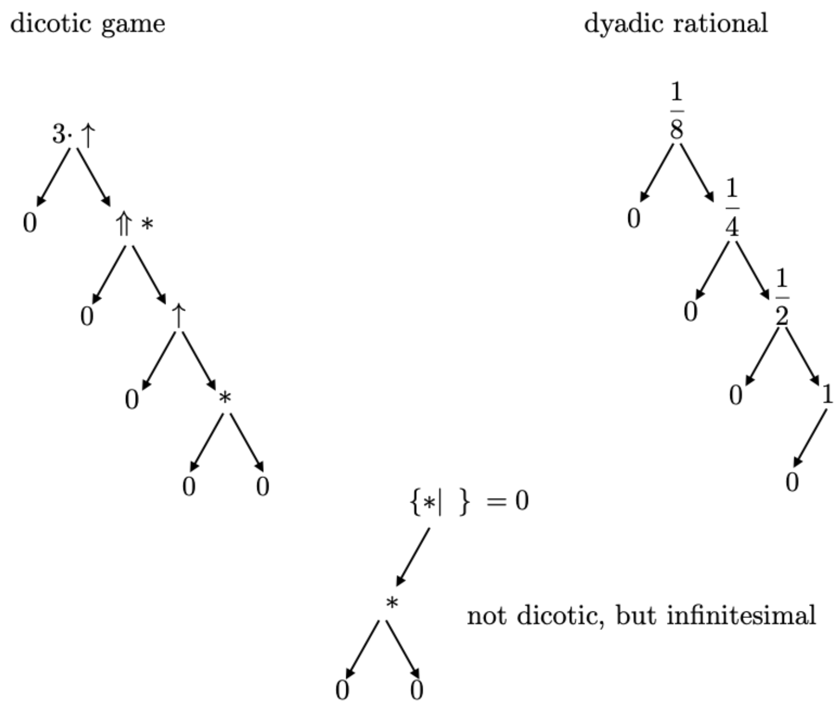
訳書 p.807（原著 p.758）　全微小（all-small）　(第 1 巻第 8 章 p.249 も参照)

ゲーム G が全微小であるとは，G のどの部分局面においても，両対局者に選択肢

が残されているか，共に選択肢がない（0 局面である）場合をいう．全微小なゲームはまた無限小なゲームでもある．ここで，ゲームが無限小 infinitistimal であるとは，任意の正実数 $x > 0$ に対して，$-x < G < x$ が成立しているゲームのことである．

Aaron Siegel の CGT では all-small より dicotic という用語が適当であると述べられている．これを「全両分枝」と訳すことにしたい．

全両分枝な無限小ゲーム，全両分枝でない無限小ゲームと無限小でないゲームの例を以下に図示する．



翻訳ノート

小林欣吾・佐藤 創 共同執筆

2020 年 1 月 20 日現在

以下で，訳書とは『数学ゲーム必勝法』，共立出版，2019 を指し，原著とは，“Winning Ways for Your Mathematical Plays,” 2nd edition, A K Peters, 2001（4 巻本）を指す．（なお，原著初版 (2 巻本) の出版は 1982 年である．）

4　翻訳ノート vol.4

4.1　第 23 章　ペグを上手に取り除け

訳書 p.825（原著 p.805）セントラル・ソリテール問題解決の歴史

章末の参考文献によると，

(1) Dudeney の 19 手解は 1908 年の発表らしい．

(2) Berghot の 18 手解は 4 年後の 1912 年．

(3) Beasley の 18 手解最良の証明はそれから 52 年後の 1964 年ということだが，参考文献にない．この原著での紹介が初公開とのこと（p.825 参照）．

訳書 p.844（原著 p.824）　原料費積（raw product），完成品積（finished product）

product は，「生産」と計算上の「積」の掛け詞になっている．生産的 productive も同様．

訳書 p.843 ～ 847（原著 p.823）　資産の管理（Managing Your Resouces）

ペグ・ソリテールの資産勘定をして，2 ペグ反転問題などの可能・不可能証明に応用する．

資産の額を指数の乗除で計算する．初期ボード（イギリス式）の総資産（33 本のペグ）が GNP で，それをバランスシート（図 23.25）のエントリーの総積 $a^4b^4c\,\alpha\,\beta$ とする．資産の減少（手を打つこと）は 1 手の消費単位（unit）による除算で計算される．

パズル開始時の資産が原料費積，完成時の資産が完成品積，両者の比が使用可能資産である．開始局面で初期ボードから除くペグと完成局面で残すペグの資産の積が「欠損」（the deficit）で，使用可能資産は GNP/ 欠損に等しい．

訳書 p.846（原著 p.825）　放蕩息子

訳書の脚注に，「この節の議論には著者らの思い違いが存在している」と述べたが，そうではなかったので脚注を削除する．

われわれは，本文の「わずか 4 手で悪くなり得る」をやがて 6 手で行き詰まることを意味するものと早合点した（6 手で行き詰まるには 2 手目と 4 手目の跳ぶ方向は直交し，その 2 手の消費量は $c^2\alpha\beta$ である）．原著は「4 手で悪くなる」と述べており，その原因が 2 手目と 4 手目で同じ方向に跳んだことであると理解するべきであった．6 手で行き詰まる話はこのページの終わりにある．われわれの思い違いをお詫びして訂正する．

消費量 c^2 がなぜ放蕩かというと，この 2 手以外の手のために残された資産は

$$a^4b^4c^{-1}\alpha\beta/c^2 = a^4b^4c^{-3}\alpha\beta \quad \text{(正誤表参照)}$$

と計算され，$a^4b^4c^{-3}\alpha\beta = A^2B\,(b\beta)\,b\,\alpha$ であるから

$$\boxed{a^4b^4c^{-3}\alpha\beta \text{ は生産力がない　(正誤表参照)}}$$

と判定される．残高は使い切ることができず，資産が浪費されたことになるからである．

参考までに，跳ぶ方向が直交して 6 手目で行き詰まる「愚か者の手」と，その救済手順を記す．

手詰まり手順	E	j	o	P	b	N
資産の消費	A	$c\beta$	B	$c\alpha$	1	1

$$\text{資産残高} = \frac{\text{使用可能資産}}{\text{資産消費総量}} = \frac{a^4b^4c^{-1}\alpha\beta}{ABc^2\alpha\beta} = A\,b\,(b\beta).$$

このように愚か者は生産力のある資産を残したにもかかわらず，行き詰まったことになる．

愚か者の救済は，次のように第 6 手の修正から始まる（付録参照）:

救済手順	E	j	o	P	$b\,D\,G\,J\,m_2\,P\,L\,C\,p\,A_2$	K	$D\,d\,g\,j\,M_2\,p\,a\,\ell\,c\,P$	i	f	O
資産の消費	A	$c\,\beta$	B	$c\,\alpha$	$\longleftarrow$ 消費なし $\longrightarrow$	$a\,\alpha$	$\longleftarrow$ 消費なし $\longrightarrow$	a	1	B

見事にセントラル・ソリテールに成功し，資産残高 $= \dfrac{a^4b^4c^{-1}\alpha\beta}{AB^2a^2c^2\beta} = 1$ となる（“予算の完全消化”）．

訳書 p.856（原著 p.834）　分割する

図 23.35 により A から I までの手を打って到達する 5 ペグの配置 $kPIJK$ は興味深い．最終ペグの行き先は (1) $P_{\downarrow}KDk$, または, $J_{\rightarrow}kHK$ により I，(2) $J_{\rightarrow}kH_2$ により L，(3) $P_{\downarrow}KD_2$ により f となる．I, L, f は筆者が旧ユーゴスラビア（p.835 参照）で出会った 3 都市と対応する．

訳書 p.857（原著 p.835）　愚か者のペグ・ソリテールなど

(a) 愚か者を救う解については p.846 に関する翻訳メモ（放蕩息子）にも記述がある．

(b) 手詰まり局面 “鎌と槌” に達する 10 手は $O f x N I A\, o\, d\, K C$ である．

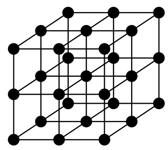
4.2 第 24 章 パズルをとことん極める

訳書 p.870（原著 p.848） 立方体の凝った 3 色同数塗り

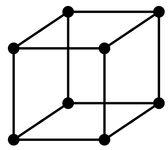
表題の Coloring Three-by-Threee-by-Three by Three, Bar Three は言葉遊び．たて・横・高さの 3 方向の直線のみで，対角線は含まれない．

訳書 p.871（原著 p.848, 916） 直線はなぜ 49 本？

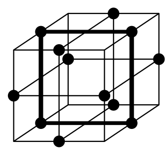
本文には，3×3×3 の Tic-Tac-Toe の並び線（3 つのマスを通る線分）が $\frac{1}{2}(5^3-3^3)=49$ 本あると書かれている．この公式がどのように得られるかを記す．（2 次元の場合は図 22.2）



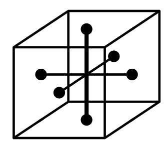
Tic-Tac-Toe の各マスを点と表現し，3 点を通る線分の本数を数える．右図のように 27 点があるが，3 点を通る線分の本数 49 は次のように求まる．



(1) 3 次元 Tic-Tac-Toe の頂点は $8=2^3$ 個あり，相異なる 2 頂点を結ぶ線分の中点はすべて Tic-Tac-Toe の点であるから，線分の本数は $\binom{8}{2}=28$ である．

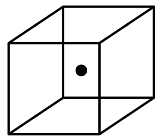


(2) 3 次元 Tic-Tac-Toe の辺の中点は $12=3\times 2^2$ 個あり，互いに直交する 3 つの正方形（2 次元 Tic-Tac-Toe）の頂点に位置する．各正方形の 4 頂点を結ぶ線分は $6=\binom{4}{2}$ 個あり，その中点はすべて Tic-Tac-Toe の点である．よって，すべての線分の個数は $3\times\binom{4}{2}=18$ である．



(3) 3 次元 Tic-Tac-Toe の面の中心の点は $6=3\times 2^1$ 個あり，直交する 3 つの線分（1 次元 Tic-Tac-Toe）の両端点にある．各線分の中点は立方体の中心点で，面の中心を結ぶすべての線分の個数は $3\times\binom{2}{2}=3$ である．

(4) 形式的に立方体の中心点（0 次元 Tic-Tac-Toe, $2^0 = 1$ 点）を考える．線分の個数 は $\binom{1}{2} = 0$ である．形式を整えるためにこれを加える．



以上から 3 次元 Tic-Tac-Toe の中の 3 点を貫く線分が $28 + 18 + 3 + 0 = 49$ 本あることが示され，その個数が

$$\binom{2^3}{2} + 3 \cdot \binom{2^2}{2} + 3 \cdot \binom{2^1}{2} + \binom{2^0}{2} = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\binom{2^k}{2}$$

と表されることがわかった．この結果を一般化して，n 次元 Tic-Tac-Toe の中で 3 点を貫く線分の個数を T_n とすれば，$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2^k}{2}$ となる．この式を変形すると，

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k\left(2^k - 1\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big((4+1)^n - (2+1)^n\Big) = \frac{1}{2}\Big(5^n - 3^n\Big) \end{aligned}$$

を得る．さらに一般化した公式とその簡潔な証明が，第 3 巻第 22 章 p.790 にある．

訳書 p.895（原著 p.872）　図 24.35 の説明

ステージ A の説明の最後 (p.895) に，「ときどき，これはすでにホームに戻っている底部の辺キューブを乱すことになるが」と書かれているが，そのようなことは起こらず，調整（Adjust）の操作は必要がないと思われる（原著でも？マークが付いている）．

ステージ E と F では，2 回の操作が組になっていることに注意されたい．そのために 2 回目はまず上層だけ回転し，2 回目の操作を行った後で上層を元に戻す．下 2 層は 2 回の操作で元に戻る．

訳書 p.900∼908（原著 p.877 878）　親父のパズル，ロバパズル，1 世紀パズル，1.5 世紀パズル

日本では類似のパズルが「箱入り娘」の名で知られている．ブロックの配置は図

24.37(a) の「ロバパズル」に近く，大きな正方形を娘，たて長の長方形を父母と祖父母，横長を番頭，小正方形を丁稚に見立てて，昔の商家をイメージさせる．

図 24.40 の親父のパズルの地図はパズルの解答を示唆している．

図 24.41 のロバパズルの地図はパズルの解答を示していない．

図 24.41 の見方　スタートは頭，ゴールは尻と考えられる．右肩に小正方形 4 つが描かれていないが，下段の縦長方形の任意に 2 つを中に水平線を引いて 4 つの小正方形を作ればいいようだ．中の 2 つの縦長方形にするか，左右の 2 つの縦長方形にするのがいいと思う．頭から右肩に移行できることや，右肩から斜め左下の中央カラム右から 2 番目の対称局面に移行できることは確認できる．しかし，頭から右肩までは 38 手かかり，左下の局面に移るには遠回りになるようだ．

図 24.43 の 1 世紀パズルの地図にはパズルの解答は示されないが，付録の図 24.65 には 1 世紀パズルの 100 手解 2 つと 1 世紀半パズルの 150 手解の概略が記されている．

図 24.43 の見方　スタートは左ページ中央付近で太い線の四角形で囲まれているが，ゴールは含まれてないようだ．狭い「橋」を渡って上に移動する．橋を渡る前は 2×2 のピースが 2 つの 1×2 のピースの上方にある．橋を渡ると 2×2 のピースは 2 つの 1×2 のピースの間にある．橋を渡るために多くの試行錯誤を要する．橋を渡るために 50 数手の準備をして，57〜64 手目で橋を渡る．

訳書 p.908（原著 p.885）　コイン投げパラドックス

人は無意識に全順序を前提に考えるので，思いがけず三つ巴や四つ巴に遭遇すると，“これはパラドックスだ！” と思い勝ちだ．グウチョキパーのジャンケンのようなもので，パラドックスとは言えない．ただし，この意外性を演出するにはそれなりの工夫が必要である．

ここで考察の対象になっているのは，後手必勝の確率ゲームである（Penney Ante Game と呼ばれる）．後手は a を知った後に b を決めるので，ゲームとしては公平ではない．

比較的容易に確率を計算することができる．b の勝つ確率 B と a の勝つ確率 A の

比 B : A を，b が a に勝つ（a の b に対する）オッズと言う．本文の図では負ける方から勝つ方に矢印が向いていることに注意する．

確率の計算例　a=HHH, b=THH のとき，最初に a が出ない限り， a より先に b が出る．最初に a の出る確率は 1/8, よって b の出る確率は 7/8 であり，b が a に勝つオッズは 7 : 1 となる．

リーディングナンバー aLb を用いるオッズの計算法は Conway によるもので，Conway Algorithm と呼ばれる．

オッズの計算例　a=HHH, b=THH のとき， aLa $= 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$，aLb=0, bLb $= 2^2$=4, bLa $= 2^0 + 2^1 = 3$ だから，オッズは (aLa$-$aLb) : (bLb$-$bLa) $= 7 - 0 : 4 - 3 = 7 : 1$ である．

訳書 p.909（原著 p.886）　サイコロ・パラドックス

前半の "パラドックス" には奇数次の魔方陣が利用される．サイコロ A が B に勝つ確率は 5/9 だから，オッズは 5 対 4 である．「オッズが改良される」とは，オッズの数字の差が開くことだろう．

後半の問題の面白さは，6 次式の 2 乗

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

が別の多項式の積

$$(x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8)$$

にもなる，という意外性である．この新しいサイコロから矛盾が生まれるわけではない．出た目の和だけを知らされたら，普通のサイコロと区別できないという話しである．

訳書 p.910（原著 p.886）　魔方陣

魔方陣の完全性は構成法には寄与しないが分類に使われる性質である．原著では AK 型，BK 型魔方陣は 1/2 完全としているが，1/4 完全の誤りであるので訳書では訂正した．

訳書 p.924（原著 p.900）　MacMahon のスーパードミノの彩色

図 24.56, 図 24.57 は原著では白黒表示であったが，カラーで描いてみた．

訳書 p.927（原著 p.903）[最後の審判日]

この節においては，Doomsday を [最後の審判日] と鉤括弧（ブラッケット）で括って表す．「Doomsday のルール」とは「年月日からその日の曜日を知るための手順」のことで，発案者 Conway はそのためのキーポイントになる 2 月末日の曜日のことを [最後の審判日] と呼んでいる．

西暦 y 年 m 月 d 日の曜日 w の求め方については一般に Zeller の公式がよく知られている．その方法は曜日の日, 月, ..., 金, 土を数 $1, 2, ..., 6, 0$ に対応させ，次の計算を行うものである：

$m \leq 2$ ならば，$m + 12$ を改めて m とおき，$y - 1$ を y とおく;

$C = \text{Floor}[y/100]; Y = \text{Mod}[y, 100];$

$w = \text{Mod}[d + \text{Floor}[26(m+1)/10] + Y + \text{Floor}[Y/4] + Z, 7];$

ここで，グレゴリー暦ならば $Z = -2C + \text{Floor}[C/4]$, ユリウス暦ならば $Z = -C + 5$ とする．

例　2017 年 1 月 1 日（$y = 2017, m = 1, d = 1$）の場合．$m \leq 2$ だから $m = 13, y = 2016$ とおき直し，$C = 20; Y = 16$; $d + \text{Floor}[26(m+1)/10] + Y + \text{Floor}[Y/4] = 1 + 36 + 16 + 4 = 57$;
グレゴリオ暦として，$Z = -40 + 5 = -35$; $w = \text{Mod}[57 - 35, 7] = 1$（日曜日）．

訳書 p.933（原著 p.908）　月齢

上から 10 行目　「1273 回」を「1237 回」に，また訳「月周期」を「朔望周期」に訂正する．

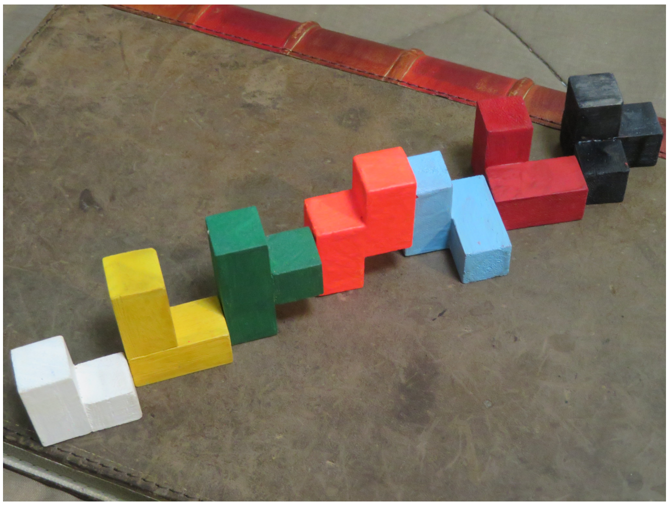
下から 4 行目に，「1998 年の場合は，日の値 + 月の値 − 1」という記述があるが，この −1 は単に「年の値」ではなく，1998 年の年の値 03 に世紀（19xx）の値 −4 を加えたものである．本文には元旦の月齢の表が 2010 年までしかないので，同じ方法で 2030 年まで計算した結果を示す：

2011,	2012,	2013,	2014,	2015,	2016,	2017,	2018,	2019,	2020,
−6,	5,	−15,	−3,	8,	−11,	0,	11,	22,	3,
2021,	2022,	2023,	2024,	2025,	2026,	2027,	2028,	2029,	2030,
−14,	−5,	6,	−13,	−2,	9,	−10,	1,	12,	−7.

日本では堀源一郎氏の“おに・おに・にし — 簡易月齢計算法）”（『天文月報』1968年7月号）が知られている．

訳書 p.936, 937（原著 p.911, 912）　ソーマパズル

著者力作のソーマ地図（図 24.62）には記入漏れや誤りが含まれていた．
我々は自作で次のようなソーマを制作してソーマ地図を頼りに航海して誤りなどを発見した．



訳書では原著の誤り 10 箇所を次のように修正している．

p.936

(1) $\dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{1b}} - \dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{1a}}$ の間は wg,　(2) $\dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{2n}} - \dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{2l}}$ の間は wg,

(3) $\dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{5d}} - \dfrac{\mathrm{WL}}{\mathrm{4d}}$ の間は wr,　(4) $\dfrac{\mathrm{RL}}{\mathrm{3d}} - \dfrac{\mathrm{WL}}{\mathrm{2d}}$ の間は wr,

p.937

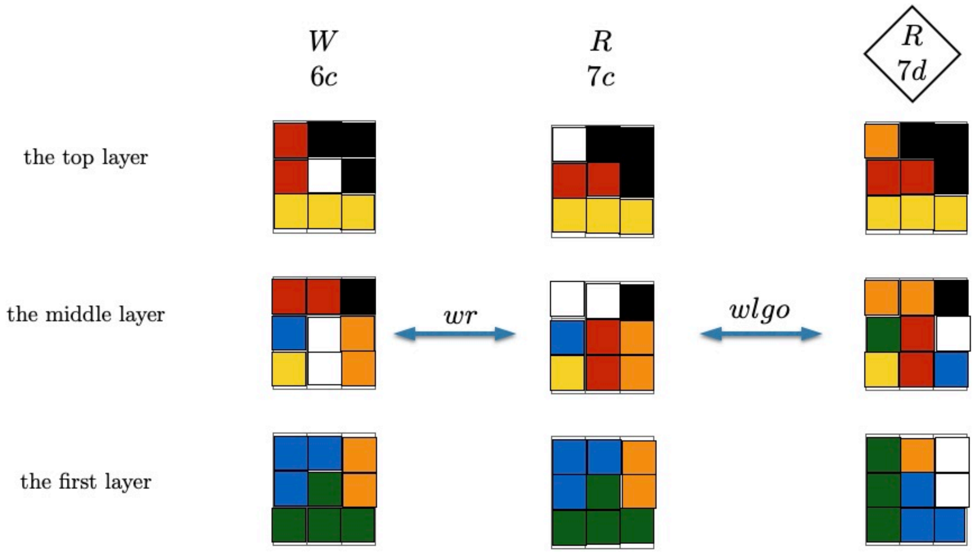
(5) $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{3k}} - \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{6a}}$ の間は ow,　(6) $\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{3k}} - \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{6a}}$ の間は ow,

(7) $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{6a}} - \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{6b}}$ の間は wy（ow を訂正）, (8) $\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{6a}} - \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{6b}}$ の間は wy（ow を訂正）,

(9) $\dfrac{\mathrm{WR}}{\mathrm{6a}} - \dfrac{\mathrm{WR}}{\mathrm{6c}}$ の間は ry,　(10) $\dfrac{\mathrm{O}}{\mathrm{1k}} - \dfrac{\mathrm{O}}{\mathrm{1f}}$ の間は wy.

このソーマ地図を読み解くには，少なくとも 1 つの位置を同定できる配置を知る必

要がある．p.936 の左隅の孤立したダイアモンドは 4 つの駒を組み直して大陸に渡ることができる．その配置と海を隔てた近くの配置を次に図示しておく．



訳書 p.939∼941（原著 p.913∼915）　Hoffman のパズルの解

付録の表 24.1 はパズルの解ではなく，「手がかり」だと記されている．この手がかりをもとに 21 個の解を特定するには多くの情報が欠けている．27 個の $4 \times 5 \times 6$ 直方体ブロックを実際に手にして立体的にパズルを捉えない限り，表 24.1 を理解することは困難である．ちなみに，我々はそのようなブロックを作成して $15 \times 15 \times 15$ の立方体の中にパッキングしてみた．次の写真は自己双対な解である．

以下に解を記すが，そのために図表に表された相異なる層に次のように付番する．表 21.1 の上部の 20 個は，左上からたて方向に 1, 2, . . ., 20 とし，下部の 12 個は，左上からたて方向に 3, 21, 22; 7, 23, 22; 24, 25, 26; 27, 28, 26 とする．図 24.63 の特別な層を 0 とし，それに操作 R を施したもう 1 つの特別な層を 00 とする．

$$0 \quad \boxed{\begin{array}{ccc} \alpha & a & b \\ a & b & c \\ \beta & c & \gamma \end{array}} \qquad\qquad 00 \quad \boxed{\begin{array}{ccc} a & \alpha & b \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{array}}$$

回転または鏡像で移る解は同型とする（≅ で表す）．解の同型類の番号付けと各解を構成する 3 層を以下に示す．操作 R, S による解の移動を見ることができる（操作 T は表 24.1 を参照）．

解	3 層
1	0,1,2 ≅ 00,4,3
2	0,2,1 ≅ 00,3,4
3	00,2,1 ≅ 0,3,4
4	00,1,2 ≅ 0,4,3
18	22,21,3

解	3 層
5	0,5,6 ≅ 00,8,7
6	0,6,5 ≅ 00,7,8
7	00,6,5 ≅ 0,7,8
8	00,5,6 ≅ 0,8,7
19	22,23,7

解	3 層
9	0,9,10 ≅ 00,12,11
10	0,10,9 ≅ 00,11,12
11	00,10,9 ≅ 0,11,12
12	00,9,10 ≅ 0,12,11
20	26,25,24

解	3 層
13	0,13,14 ≅ 00,16,15
13	0,14,13 ≅ 00,15,16
14	00,14,13 ≅ 0,15,16
15	00,13,14 ≅ 0,16,15
21	26,28,27

解	3 層
2	0,17,18 ≅ 00,20,19
9	0,18,17 ≅ 00,19,20
16	00,18,17 ≅ 0,19,20
17	00,17,18 ≅ 0,20,19

双対関係にある解の組は (1,10)，(2,9)，(3,15)，(4,17)，(5,6)，(7,11), (8,12), (14,16) であり，解 13 は自己双対である．解 13 のキューブには特別な層 0 と 00 を含む直交した層があり，どちらの層を反対側に移動しても再び同じ形の解を得る（9 回反復すると元に戻る）という驚くべき性質をもつ．解 18∼21 は双対解をもたず，操作 S を施すと解にならない．

原著の訂正．表 24.1 の操作 S' と操作 T' の位置は入れ替える．層 16 と 20 の間に操作 T を補う．

訳書 p.941（原著 p.916）　3 色同数塗りのもう一つの解（出題は p.870）

付録に記された解の左上を座標 (x, y, z) = (0, 0, 0) と考えて，x+y+z を各セルの数字に法 3 で加えると，もう一つの解が得られる．

0	1	1		2	0	0		0	0	1
1	2	2		0	2	2		1	0	1
1	2	2		0	2	0		1	1	2

各色が同数 (9,9,9) でない塗り方は多数あるが得られるものは, (10,7,10) と (11,8,8) であった．その塗り方は

1	1	2		2	0	0		2	0	0
2	1	2		0	2	2		0	1	1
2	2	0		0	2	0		0	1	1

と

1	2	1		0	2	0		1	0	1
0	0	2		2	2	0		0	2	0
1	2	1		0	0	2		1	0	1

である．

訳書 p.942（原著 p.916）　コインのペア・スライド問題（図 14.23）の一般解

3 ペア問題の解は特殊なので除外し，4 ペア問題の解を $9,10 \leftarrow 2,3 \leftarrow 5,6 \leftarrow 8,9 \leftarrow 1,2$ と記す（初期状態は 1,2,3,4 に裏，5,6,7,8 に表がある）．5 ペア ～ 7 ペア問題の解を求めてこの記法で記すと，次のようになる．

5 ペア　$11,12 \leftarrow 2,3 \leftarrow 8,9 \leftarrow 5,6 \leftarrow 10,11 \leftarrow 1,2$
6 ペア　$13,14 \leftarrow 2,3 \leftarrow 8,9 \leftarrow 4,5 \leftarrow 9,10 \leftarrow 12,13 \leftarrow 1,2$
7 ペア　$15,16 \leftarrow 2,3 \leftarrow 11,12 \leftarrow 5,6 \leftarrow 10,11 \leftarrow 7,8 \leftarrow 14,15 \leftarrow 1,2$

$n \geq 4$ に対して，$n+4$ ペア問題は n ペア問題に帰着される：

	○○○○	○○···○○●●···●●●●	●●__
1	○__○	○○···○○●●···●●●●	●●○○
2	○●●○	○○···○○●●···●●__	●●○○
⋮	(不動)	(n ペア問題)	(不動)
$n+2$	○●●○	__···○○●○···●○●○	●●○○
$n+3$	○●●○	●○···○○●○···●○●○	●__○
$n+4$	__●○	●○···○○●○···●○●○	●○●○

$n+4$ ペア問題の解の最初の 2 手 $2n+9, 2n+10 \leftarrow 2, 3 \leftarrow 2n+5, 2n+6$ により内側の n ペア問題に移行する．その部分を n 手で終了後，最後の 2 手 $5, 6 \leftarrow 2n+8, 2n+9 \leftarrow 1, 2$ で全体が完成する．

訳書 p.946（原著 p.920）　“連合国の旗” 問題の解が 2 個に限られることの確認

5 頂点グラフを図 24.48 にならって描くと，自己ループは存在しないので，可能なサイクルの長さの組は 32 と 5 以外にはない．ところが，32 タイプのサイクルは，J-(3)-R-(4)-F-(2)-J と B-(1,5)-U の 1 個であり，このとき残された辺では 5 サイクルを形成できない．したがって，可能なサイクルの長さは，5 に限られることが分かる．

4.3　第 25 章　ライフとは何だ？

訳書 p.962（原著 p.936）　　図 25.12　チェシャ猫

L. Carroll の『不思議の国のアリス』に登場する猫（Cheshire 州は作者の生誕地）.

訳書 p.963（原著 p.937）　　図 25.13　ペンタデカスロン

「を消滅させる.」に描かれているグライダーは原著では 1 行下に描かれていたが, それではそのグライダーはペンタデカスロンによって消滅しないので修正した.