はじめに

本書は「保険と金融の数理」というタイトルのとおり，生命保険，損害保険，金融で，どのように数学が用いられるかを解説した書物である．伝統的には，経済学部など文系学部で扱われていたこれらの話題は，金融・保険の高度化にともない高度な数学が利用されるようになり久しい．2000 年代に入ってこの流れは確固としたものとなり，経済学部のみならず理工系の諸学部でこれらの話題についての教育が行われるようになった．そこで，これらの分野について学んでみたい学部学生や大学院生を対象に，保険や金融の数学に関する本を執筆することとした．特に，理工系の大学 1,2 年生で学ぶ線形代数や微分積分，確率・統計を理解している学生ならば読み進めることができる本を目指した．数学をしっかりと学んだ経済学部の学生も，理工系の学生と同じように読み進められるものと思う．「読み進められる」と書くと簡単に読める本と勘違いする学生さんもいると思われることから，少しだけ注意をしておく．読み進めることができるというのは，楽々読めるという意味ではない．確かに本書は学部 2 年生程度の数学しか使っておらず，難しい前提知識を仮定した本ではない．その一方で，読み通すとなると膨大な計算をする必要に迫られるものと思う．それを一つひとつ確認することで，将来，抽象的な数学を学ぶ際の引き出しを作ってもらうことを意図して書かれている．そして，本書を読むことで，高度な数学を金融や保険の知識に応用したい学生が，そこではどのような問題があるのかを見てとることができるようになることを望んでいる．このような目標で書かれた本であるので，理解のしやすさを優先し，数学的な厳密さを犠牲にしているところがある．厳密さを犠牲にしてよいというつもりは全くない．ただ，この本が，なぜ専門課程でより複雑で難解なさまざまな事柄を学ぶのかを考え，より深く自分自身の専門分野や数学を学ぶきっかけとなることを望む．一方で，

専門課程でより深い数学を学んだが，その知識を金融・保険に役立てる方法を模索している学生や大学院生にも役に立つ本となっているものと思う．

それでは，金融や保険といった研究分野でどのような数学がどのように用いられ，どのような問題があるのかを概観していきたいと思う．

生命保険の数理

生命保険の数学は，生命保険契約にまつわる数理的な構造を扱っている．商品の構造に合わせて将来支払わないといけない保険金や将来受け取る保険料の割引現在価値を求めることを基本に，保険会社は保険金支払いにあらかじめどの程度積み立てておくべきかなど，さまざまな問題について考察を行うことを目指す研究分野である．近年は，株式（指数）などの価格と連動して支払いが決まる複雑な保険商品なども提案されるようになっているが，生命保険商品は，本来的には，人の生死や健康状態に従って保険金支払額や支払いタイミングが決まる比較的シンプルな商品構造をもつ金融商品である．シンプルな商品構造とは書いたが，（そんなことはありえないが）契約者が 20 年後に死亡することがわかっていて，そのときの支払額があらかじめわかっているようなケースにおいてすら，たとえばその 20 年間に金利はどのように動くのかで割引現在価値が変わるなど難しい問題もはらんでいる．もちろん，契約者がいつ死亡するかはわからないので，問題はずっと難しい．契約者の死亡タイミングを問題として扱うには，生命表といわれる表を用いて分析するのが普通である（表 1）．生命表は男女に分かれたものが，厚生労働省のホームページなどで公開されている．生命表は，ある年度に生まれた人たちが将来のある年まで生き残っている割合が記されている．もう少し詳しくいうと，ある年齢の者が 1 年以内に死亡する確率（死亡率）や，残りの生存時間の期待値（平均余命）を表にしたものである．この表を見ることで，保険契約者がどのくらいの確率でどのタイミングで死亡するかモデリングすることができる[1)]．現在よく用いられている基本的なモデルは，金利を一定値にする代わりに，生命表をもとに契

1) 生命表は少しずつ更新されていくものなので，その動き方を確率過程を用いてモデリングをする確率死亡率モデルなども提案されている．

表 1　第 21 回生命表（男）

年齢		生存数	死亡数	生存率	死亡率	死　力	平均余命	定常人口	
x		l_x	${}_nd_x$	${}_np_x$	${}_nq_x$	μ_x	$\mathring{e}_x$	${}_nL_x$	T_x
0	週	100 000	92	0.99908	0.00092	0.09375	79.55	1 917	7 955 005
1		99 908	11	0.99989	0.00011	0.01644	79.60	1 916	7 953 089
2		99 897	9	0.99991	0.00009	0.00170	79.59	1 916	7 951 173
3		99 888	7	0.99993	0.00007	0.00426	79.58	1 916	7 949 257
4		99 881	28	0.99972	0.00028	0.00347	79.57	8 983	7 947 342
2	月	99 853	19	0.99981	0.00019	0.00263	79.50	8 320	7 938 358
3		99 834	37	0.99962	0.00038	0.00197	79.43	24 953	7 930 038
6		99 796	43	0.99957	0.00043	0.00110	79.21	49 887	7 905 085
0	年	100 000	246	0.99754	0.00246	0.09375	79.55	99 808	7 955 005
1		99 754	37	0.99963	0.00037	0.00057	78.75	99 733	7 855 198
2		99 716	26	0.99974	0.00026	0.00026	77.78	99 704	7 755 464
3		99 690	18	0.99982	0.00018	0.00022	76.80	99 681	7 655 761
4		99 672	13	0.99987	0.00013	0.00015	75.81	99 665	7 556 080
5		99 659	11	0.99989	0.00011	0.00012	74.82	99 653	7 456 415
6		99 647	10	0.99990	0.00010	0.00011	73.83	99 642	7 356 762
7		99 637	9	0.99991	0.00009	0.00010	72.84	99 632	7 257 120
8		99 628	8	0.99992	0.00008	0.00009	71.84	99 623	7 157 488
9		99 619	8	0.99992	0.00008	0.00008	70.85	99 615	7 057 865
10		99 612	8	0.99992	0.00008	0.00008	69.85	99 608	6 958 249
11		99 603	10	0.99990	0.00010	0.00009	68.86	99 599	6 858 642
12		99 594	11	0.99989	0.00011	0.00010	67.87	99 588	6 759 043
13		99 583	13	0.99987	0.00013	0.00012	66.87	99 577	6 659 454
14		99 570	15	0.99985	0.00015	0.00014	65.88	99 563	6 559 878
15		99 555	19	0.99981	0.00019	0.00017	64.89	99 546	6 460 315
16		99 536	24	0.99976	0.00024	0.00021	63.90	99 525	6 360 769
17		99 512	30	0.99970	0.00030	0.00027	62.92	99 498	6 261 244
18		99 482	37	0.99962	0.00038	0.00034	61.94	99 464	6 161 746
途中省略									
89		25 141	3 646	0.85497	0.14503	0.14839	4.51	23 303	113 307
90		21 495	3 448	0.83959	0.16041	0.16615	4.19	19 752	90 003
91		18 047	3 171	0.82431	0.17569	0.18378	3.89	16 436	70 252
92		14 876	2 855	0.80805	0.19195	0.20290	3.62	13 421	53 816
93		12 021	2 515	0.79078	0.20922	0.22364	3.36	10 734	40 395
94		9 506	2 163	0.77245	0.22755	0.24614	3.12	8 395	29 661
95		7 343	1 813	0.75305	0.24695	0.27056	2.90	6 407	21 266
96		5 529	1 479	0.73256	0.26744	0.29704	2.69	4 763	14 859
97		4 051	1 171	0.71095	0.28905	0.32578	2.49	3 441	10 096
98		2 880	898	0.68823	0.31177	0.35695	2.31	2 410	6 655
99		1 982	665	0.66440	0.33560	0.39077	2.14	1 632	4 245
100		1 317	475	0.63949	0.36051	0.42746	1.98	1 065	2 613
101		842	325	0.61351	0.38649	0.46726	1.84	669	1 548
102		517	214	0.58652	0.41348	0.51044	1.70	402	879
103		303	134	0.55858	0.44142	0.55729	1.58	231	478
104		169	80	0.52977	0.47023	0.60811	1.46	126	247
105		90	45	0.50020	0.49980	0.66325	1.35	65	121
106		45	24	0.46998	0.53002	0.72307	1.25	32	56
107		21	12	0.43925	0.56075	0.78796	1.16	14	24
108		9	5	0.40818	0.59182	0.85837	1.07	6	10
109		4	2	0.37696	0.62304	0.93474	0.99	2	4
110		1	1	0.34578	0.65422	1.01761	0.92	1	1

この生命表は，厚生労働省のホームページ内にある第21回生命表（男）を抜粋して作成したものである．平成22年国勢調査による日本人人口（確定数），人口動態統計の確定数（平成22年死亡数，平成21年および平成21年出生数）を基礎資料として作成されている．

約者の将来の死亡確率をモデリングしながら，生命保険の価値を計算することであろう．本書でも，生命表を所与として保険金・保険料の割引現在価値を求めるアプローチを基本に，生命保険の価格を求めている．一方で，生死・健康状態などにいくつかの状態があり，その状態を遷移していくマルコフ連鎖を用いたモデリングやそれらのモデルにおける生存確率の数値計算法，近年話題となった変額商品の価格評価など多彩な内容を盛り込んでいる．また，生命表をよく近似するパラメトリック・モデルの構成や，そのモデルにおける生存確率の計算法など他書ではあまり見られない内容も盛り込んだ．生命保険数学の本は四則演算を中心とした初等的な数学のみを用いて記載されることが多い中，本書を読むことで生命保険数学にも比較的高度な数学を用いる場があるということを再認識していただけたらと思っている．

損害保険の数理・破産理論

破産理論は，1900 年代の初頭にスウェーデンのアクチュアリーであるリンドベリにより研究が始まった．残念ながら，日本では研究者があまり多くない分野ではあるが，破産理論の研究は 100 年以上の歴史がある．特に，20 世紀最後の 10 年程度は数多くの研究がなされた印象をもつ．破産理論における代表的なモデルでは，下側にのみジャンプをもつ複合ポアソン過程を基礎とする古典的なモデルを用いて，数多のモデルが考案されている（図 1 を見よ）．破産理論の古典モデルでは，一定額の保険料を得ることで保険会社の剰余金が積み上がっていく代わりに，たまに保険金の請求があれば支払いに応じなければならず，保険金支払いで剰余金が目減りするようなモデルを用いる．近年は，レビ過程など数学的により複雑なモデルを用いて分析されることも多いようである．このようなモデルにおいて保険会社の剰余金が負になる（つまり破産する）確率を計算するというのが，よく見られる問題であろう．ただ，破産理論は破産確率だけではなく，破産するまでの時間の確率分布の導出や，破産時の赤字額，破産直前の黒字額，いったん破産したとして黒字に復帰するまでの時間の分布の導出，税金や配当の効果，複数の保険会社がある場合にどのようなことが起こるかなど，本当に多くの研究がなされてきた．これらの計算では，ラプラス変

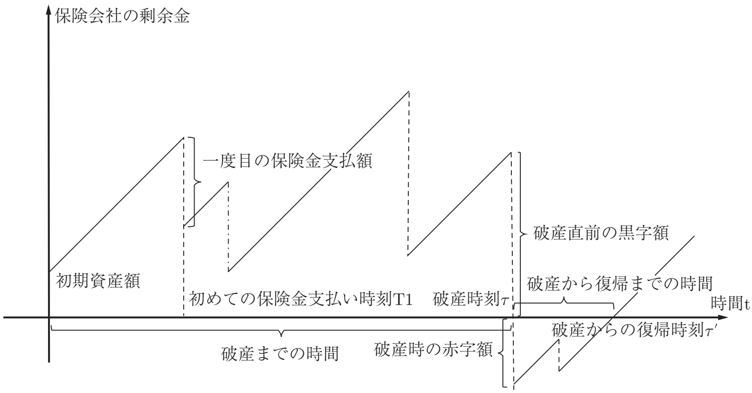

図 1　破産理論の概念図

換を基礎に計算を進めることが多いようである．本書では，連続モデルのみならず離散モデルにおける破産理論などにも触れて，マルコフ連鎖の再帰性と破産理論の関係などの話題についても取り上げてみることとした．また，近年の発展として個人破産の話題を盛り込み，本書で扱う生命保険，金融，破産理論が融合していくような問題として，個人破産の問題についても記載をした．破産理論へ興味を抱いてもらえると嬉しい．

金融の数理

1990 年代より日本でも金融工学や数理ファイナンスといった研究分野が認知されるようになり，かつてと比べて一般的な分野となった感が強い．本書では確率微分方程式などをなるべく簡単に説明することで，オプションの価格付け問題や確率微分方程式のパラメータ推定問題について記述を行った．これらの分野は，本来，測度論的確率論を学んだ上で正確に組み立てられるべき類の話題である．しかし，ここではランダム・ウォークのアナロジーから確率解析を組み立てることで，測度論の知識を仮定しないでも（直感的に）理解が可能なようになっているものと思う．一方で，本来，難しい数学を仮定して初めて導くことができた諸結果が，なぜそれが成り立つのかを理解できるように初等的

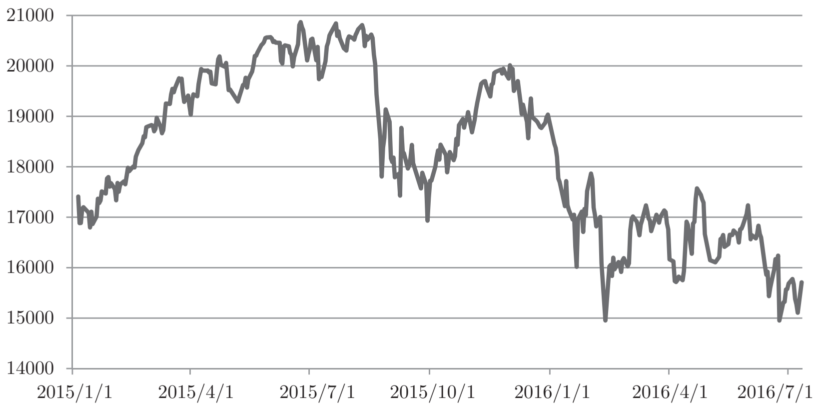

図 2　日経平均の動き (2015 年 1 月 1 日～2016 年 7 月 11 日)

に書いたつもりである．それにより，初学者のみならず，これらの分野についてよく理解をしている人にとっても何らかの参考になるのではないかと思っている．

ここまで，確率解析とか確率微分方程式という言葉を突然使ってきたが，それがどのようなものか簡単に説明をしておこう．図 2 は 2015 年 1 月 1 日～2016 年 7 月 11 日の日経平均の終値をプロットした図である．かなり「ぎざぎざ」した動きになっていることが見てとれるものと思う．これは，理科系の教養課程で学ぶ古典力学など多くの問題で滑らかな挙動をする現象について分析していることとは対照的である．このように，ぎざぎざした動きを分析するとなると，たとえば，微分をとれるのかすら心もとないであろう．確率解析は株価のように「ランダム」かつ「ぎざぎざ」と動く現象に対してよく用いられる数学である．ところで，日経平均オプションという金融商品をご存知であろうか？　ある決まった日（満期）に，たとえば 3 ヶ月後に，決まった価格で日経平均を特定の価格（権利行使価格）で買ったり（コール），または売ったり（プット）する権利が取引されているのである．表 2 は 2016 年 7 月 11 日のオプションの価格である．オプションの価格付け問題は，先ほどのぎざぎざ動く日経平均株価のような資産価格過程をもとに，日経平均オプションなどのオプションの理論

表 2　2016 年 7 月 11 日のオプション価格（日本経済新聞［7 月 12 日朝刊］より抜粋）8 月，9 月とあるのは，限月が 8 月，9 月のオプションを指している．すなわち，満期日が 8 月，9 月にあるオプションのことである．各限月の第 2 金曜日の前日が取引最終日，翌日の第 2 金曜日が満期日となっている．

コール・オプション価格

行使価格	15500	15625	15750	15875	16000	16125	16250	16375	16500
8 月	630	550	495	435	370	320	270	245	200
9 月	-	625	500	500	500	455	370	360	305

プット・オプション価格

行使価格	15000	15125	15250	15375	15500	15625	15750	15875	16000
8 月	245	280	320	360	400	450	495	550	645
9 月	375	580	445	-	540	620	660	-	870

価格を計算する方法を提案することとなる．3 章で学ぶこととなる確率解析や金融の知識が，生命保険や破産理論と結び付いていく様子を記載したのも本書の特徴といえると思う．

本書は，東北大学経済学部・大学院経済学研究科，および大阪大学金融保険教育研究センター（現・数理・データ科学教育研究センター）で行った講義をもとに，大幅な加筆を加えて書いたものです．本書の執筆においては，東北大学経済学研究科の照井伸彦教授からの勧めがあったことに感謝の言葉を述べさせていただきたます．さらに，早稲田大学理工学部の清水泰隆先生，立命館大学理工学部の尾張圭太先生，東京理科大学経営学部の今村悠里先生にはお忙しい中，原稿を読んで多くの指摘やコメントをしていただきました．この場を借りて感謝の言葉を述べさせていただきます．また，金融や保険の数理の世界にいざなっていただいた恩師・国友直人明治大学教授（東京大学経済学研究科名誉教授）にも，学生時代のたくさんのよい思い出とともに感謝の言葉を述べさせていただきます．本書を書くにあたり，学部・大学院でのゼミでの経験が大きく役に立っていることは疑いようがなく，東北大学で多くの優秀なゼミ生・大学院生に恵まれたことにも感謝します．その中でも，細部まで確認作業をして下さった研究室の元・大学院生である木崎恵介君には，特に感謝の言葉を述

べさせていただきます．最後に，急に執筆が進んだかと思えば筆者が忙しくなると今度は突然執筆が滞ったりと，最初から最後まで執筆の進捗状況にやきもきさせてしまった共立出版の山内千尋さんにも大変お世話になりましたのでお礼を述べさせていただきます.

2017 年 1 月　　　　著　者