『確率解析への誘い』初版 1 刷からの補足

本書は，2016 年 9 月の初版 1 刷公刊後，より内容の充実を図るべく，重版の機会に注意を促す文章の追加や補足などを行なった．そこで，全ての読者諸賢への公平を期するべく，この場でそれらの文章を提示する（赤字箇所が追加部分である）．

- p.11　下から 10 行目〜
  関数の単調性は導関数の正負によって判別することができる．すなわち，
  - ★ $f(x)$ は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とする．区間 (a,b) のすべての点で $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ ならば，$[a,b]$ で $f(x)$ は単調増加（単調減少）．
  - ★関数は，増加（減少）から減少（増加）の状態に移るとき**極大値**（**極小値**）をとる．極大値，極小値を総称して**極値**という．

- p.51 ［注意 **2.1.7**］**2** 行目〜
  （$\cdots$ 起こりやすさの尺度として確率 $P(\omega)$ を割り当てることができる.）このとき，事象 A の確率 $P(A)$ は $\omega \in A$ となる $P(\omega)$ の和である．

- p.191 ［注意 **4.11.5**］（新規追加）
  一般に，$f(t)$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合して，$P\left(\int_0^T f(t)^2 dt < \infty\right) = 1$ のとき，確率積分 $\int_0^t f(s)dB(s), t \leq T$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して局所マルチンゲールになるだけである．ただし，$\{\mathcal{F}_t\}$ に適合した確率過程 $X(t), 0 \leq t \leq T$ は，次のような停止時間（定義 2.8.16）の列 $\tau_n, n = 1, 2, \ldots$ が存在すると，$\{\mathcal{F}_t\}$ に関して**局所マルチンゲール**であると呼ばれる．
  (1) τ_n は，$n \to \infty$ のとき単調増加して，ほとんど確実 (a.s.) に T に近づく．
  (2) 各 n に対して，τ_n でとめた X，すなわち，$t \wedge \tau_n = \min\{t, \tau_n\}$ とおいて考えた $X(t \wedge \tau_n)$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ に関してマルチンゲールになる．

  明らかに，マルチンゲールは局所マルチンゲールになる（すべての n に対して，$\tau_n = T$ と選ぶことが出来るから）．

- p.227 ［注意 **5.5.2**］（新規追加）
  多次元の SDE(5.5.2) に対しても，大域解に関する 1 次元の系 5.4.4 と同様な結果が成り立つ．線形増大度条件がなくても大域解をもつ場合がある．たとえば，$\lambda, \mu, \sigma, \gamma, c$ を正数として 1 次元の SDE

$$dR(t) = \lambda\big(\mu - R(t)\big)\,dt + \sigma R(t)^{\gamma}\,dB(t), \quad R(0) = c$$

  を考えよう．ただし，$\gamma > 1$．このとき，拡散係数は線形増大度条件を満たしていない．しかし，すべての $t \geq 0$ に対して $R(t) > 0$ a.s. となるようなただ 1 つの大域解が存在して次を満たすことが知られている．

$$E[R(t)] \leq c + \mu \quad (t \geq 0), \quad \limsup_{t\to\infty} E[R(t)] \leq \mu.$$

  この $R(t)$ は金融市場の高感度な $(\gamma > 1)$ ボラティリティを許す短期利子率の平均回帰モデルになっている（例題 5.3.1(3)，8.1 節参照）．

- p.276 ［注意 **6.7.3**］（新規追加）
  推移確率 $P_t(x, B)$ が $t \to \infty$ で不変分布に近づくかということが問題になる．これに関しては，次のようなパラメータ $\alpha > 0, \lambda > 0$ の**ガンマ分布** $f(x)$ を不変分布にもつモデルが紹介されている（注意 7.5.1 参照）．

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,(x \geq 0), \quad f(x) = 0\,(x < 0)$$

  ただし，$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$（**ガンマ関数**）

- p.305 ［注意 **7.5.1**］最終行
  さらに，$r > \dfrac{1}{2}\sigma^2$ ならば不変密度（例題 6.7.2）が存在してパラメータ $\alpha = \dfrac{2r}{\sigma^2} - 1, \lambda = \dfrac{2r}{\sigma^2 K}$ のガンマ分布（注意 6.7.3）になっている．

- p.309 5 行目〜
  （… 平衡点 $\overline{x}$ は大域で漸近安定である.）$\overline{x}$ は 1 点に集中したディラックのデルタ関数 $\delta(x - \overline{x})$（注意 8.4.2 参照）を確率密度とする" 退化した" 不変分布のように見なされる．

以上