

はじめに

本書は大学理工系を主な読者対象にしているが、文系でも読めるように配慮した。身近な素材を例に圏を説明しその重要性がよくわかり興味深く学習できるように工夫した圏論の入門書である。最近証明されて話題になった「abc 予想」を簡単に説明する： $a+b=c$, $a < b$ かつ a と b は互いに素となる自然数の組 (a, b, c) を考えると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$c \leq \text{rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

が有限個の例外を除けば成り立つという予想である。ここで、自然数 n に対して、 n の互いに異なる素因数の積を n の根基と呼び、 $\text{rad}(n)$ と書く。命題を現代数学の先端の言葉で書き直し、新しい概念の構築につぐ構築の果てに証明されるが、その間に圏論の基礎知識も必要となる。この予想が解決すると 30 以上の未解決問題が解けると言われている予想である。

現代数学は集合と写像という基本概念の上に立脚している。ところが、集合論に代わって現代数学の基礎を革新する圏論が出現した。圏論は、多面体を扱う位相幾何から生まれた。1900 年頃に、Poincaré がホモトピーあるいはホモロジーの研究を始めた。その研究を公理化する過程で、Eilenberg と MacLane が代数的位相幾

何学という分野を確立し、圏 (category)、関手 (functor) そして自然変換 (natural transformation) という概念を定義した。例えば、圏と関手の考え方は、紙とペンで行っていた数学の証明をコンピュータプログラムの実行で行うことを可能にするなど、圏論は急速な発展をしてきた。物理の世界でも、南部陽一郎などがはじめた弦理論においても圏論が活躍している。数学の分野では、Grothendieck 以降の代数幾何学、数論代数幾何学、非可換幾何学、表現論、代数的位相幾何学などの分野で使われており、情報科学の分野でも、圏論的論理学、関数型プログラミング言語の分野で圏論が用いられている。また、物理学の分野でも、超対称性理論や超ひも理論の理論、それに生物ネットワークなどの分野でも圏論は活躍している。

近代の自然科学は、経験の積み重ねから様々な法則を導き出し、さらにそれらの法則を統一的に説明する、より根源的な法則を見出そうと努力している。数学では圏論は現時点における根源的なものと考えられる。さらに圏論は自然科学・社会科学を統一する基本言語となり得る。各分野で別々のことばで築かれてきた成果を交流し集結することで、それぞれの分野が思いもかけぬ視点の広がりを得て大きな成果を得ることができるであろう。

この本の構成

第1章「圏論の使い方」では、いろいろな分野で使われている圏論の例を示している。一つ一つの例については詳しい説明や証明はしていないが、はじめに様々な圏論の使い方を概観した後で、厳密な理論を展開する方が少しでも取りつきやすいと思われるので、特にこの章を設けた。

第2章「圏論の基本構造」では、圏、関手、自然変換、そして随伴 (adjunction, adjoint functor) と、圏論の基本的な根幹の厳密

な定義や証明を導入した。しかし、証明については膨大になるので、特に必要と思われる個所以外、読みやすさを優先して省略する。

第3章「圏論の展開」では、第2章の基本事項の下にいろいろな形の圏論の発展・展開について述べる。

第4章「擬圏」は近年急速に研究され発展している分野である。最新の分野を知るためには必要であろう。

2018 年 戦後 73 年の報道を聞きつつ

前原 和壽