目　次

まえがき **i**

第 1 章　バックグラウンド **1**

1.1　平均曲率流とは …… 1
1.2　平均曲率流への 3 つのアプローチ …… 4
1.3　体積汎関数の勾配流としての平均曲率流 …… 9
1.4　平均曲率流とリッチ流 …… 10

第 2 章　微分幾何学における基礎概念および事実 **15**

2.1　多様体論における基礎概念 …… 15
2.2　テンソル場・微分形式・リーマン計量 …… 29
2.3　ストークスの定理 …… 34
2.4　リーマン接続・曲率テンソル場 …… 40
2.5　平行移動・測地線・指数写像 …… 47
2.6　測地変分とヤコビ場 …… 51
2.7　Myers の定理・球面定理 …… 54
2.8　実ベクトルバンドルの接続と曲率テンソル場 …… 55
2.9　概複素構造・複素構造・ケーラー構造 …… 58
2.10　リーマン部分多様体 …… 62
2.11　ガウスの方程式・コダッチの方程式・リッチの方程式 …… 69
2.12　主曲率・主曲率ベクトル・全臍性・強凸性 …… 71
2.13　体積汎関数の変分公式 …… 73
2.14　リー群・リー代数・リー変換群・対称空間 …… 76
2.15　アダマール多様体の理想境界とホロ球面 …… 93
2.16　管状超曲面（チューブ） …… 96
2.17　ラグランジュ部分多様体 …… 99

平均曲率流—部分多様体の時間発展—
小池 直之著
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113763

第 3 章 平均曲率流 103

3.1 平均曲率流方程式の解の短時間における存在性および一意性定理 …… 103

3.2 平均曲率流に沿う基本的な幾何学量の発展 …… 109

3.3 最大値の原理 …… 126

3.4 ヘルダー空間・ソボレフ空間・Ascoli-Arzelá の定理 …… 133

3.5 部分多様体に対するソボレフ不等式 …… 142

3.6 基本的な積分不等式（ヘルダー不等式，補間不等式等） …… 145

3.7 微分作用素の線形化 …… 148

第 4 章 ユークリッド空間内の超曲面を発する平均曲率流 151

4.1 平均曲率流の類別 …… 151

4.2 I 型の特異点を生ずる平均曲率流と自己相似解 …… 154

4.3 II 型の平均曲率流とトランスレーティングソリトン …… 163

第 5 章 強凸閉超曲面を発する平均曲率流 171

5.1 ユークリッド空間内の強凸閉超曲面を発する平均曲率流 …… 171

5.2 強凸性保存性 …… 173

5.3 全臍的はめ込みを発する平均曲率流への漸近性 …… 174

5.4 平均曲率のグラジエント評価 …… 188

5.5 $\|\overline{\nabla}^k \mathcal{A}\|$ の評価 …… 193

5.6 $\|\mathcal{A}\|$ の非有界性 …… 197

5.7 平均曲率の最大値と最小値の比率の収束性 …… 201

5.8 崩壊定理の証明 …… 203

5.9 リスケールされた平均曲率流に関する基本的事実 …… 205

5.10 収束定理の証明 …… 209

5.11 有界曲率をもつリーマン多様体内の強凸閉超曲面を発する平均曲率流 …… 220

平均曲率流—部分多様体の時間発展—
小池 直之著
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113763

第 6 章　保存則をもつ平均曲率流　225

6.1　保存則をもつ平均曲率流 …… 226
6.2　保存則をもつ平均曲率流に沿う基本的な幾何学量の発展 …… 228
6.3　ユークリッド空間内の強凸閉超曲面を発する体積を保存する平均曲率流 …… 233
6.4　双曲空間内の強ホロ凸閉超曲面を発する体積を保存する平均曲率流 …… 244
6.5　管状超曲面を発するノイマン条件を満たす体積を保存する平均曲率流 I …… 252
6.6　管状超曲面を発するノイマン条件を満たす体積を保存する平均曲率流 II …… 266

第 7 章　曲率関数の定める曲率流　271

7.1　曲率流 …… 271
7.2　曲率流に沿う基本的な幾何学量の発展 …… 275
7.3　Penrose 予想と逆平均曲率流 …… 283

第 8 章　ラグランジュ平均曲率流　291

8.1　Calabi-Yau 多様体と特殊ラグランジュ部分多様体 …… 291
8.2　平均曲率流に沿うラグランジュ性保存性定理 …… 294
8.3　Thomas-Yau 予想 …… 307
8.4　概 Calabi-Yau 多様体内の一般化されたラグランジュ平均曲率流 …… 311

第 9 章　手術付きリッチ流を用いた幾何化予想の解決　319

9.1　Gromov-Hausdorff 収束と Hamilton 収束 …… 319
9.2　Hamilton のコンパクト性定理と Perelman の非局所崩壊性定理 …… 325
9.3　古代 κ 解とリッチソリトン …… 331
9.4　曲率が爆発する部分の近傍の構造 …… 336
9.5　ネック，および半ネックの手術 …… 338
9.6　手術付きリッチ流の構成と幾何化予想の解決 …… 341

平均曲率流―部分多様体の時間発展―
小池 直之著
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113763

第 10 章 外在的手術付き平均曲率流 345

10.1 超曲面ネック …… 345

10.2 超曲面ネックの外在的手術 …… 347

10.3 2 凸閉超曲面を発する外在的手術付き平均曲率流 …… 348

参考文献 351

索 引 359