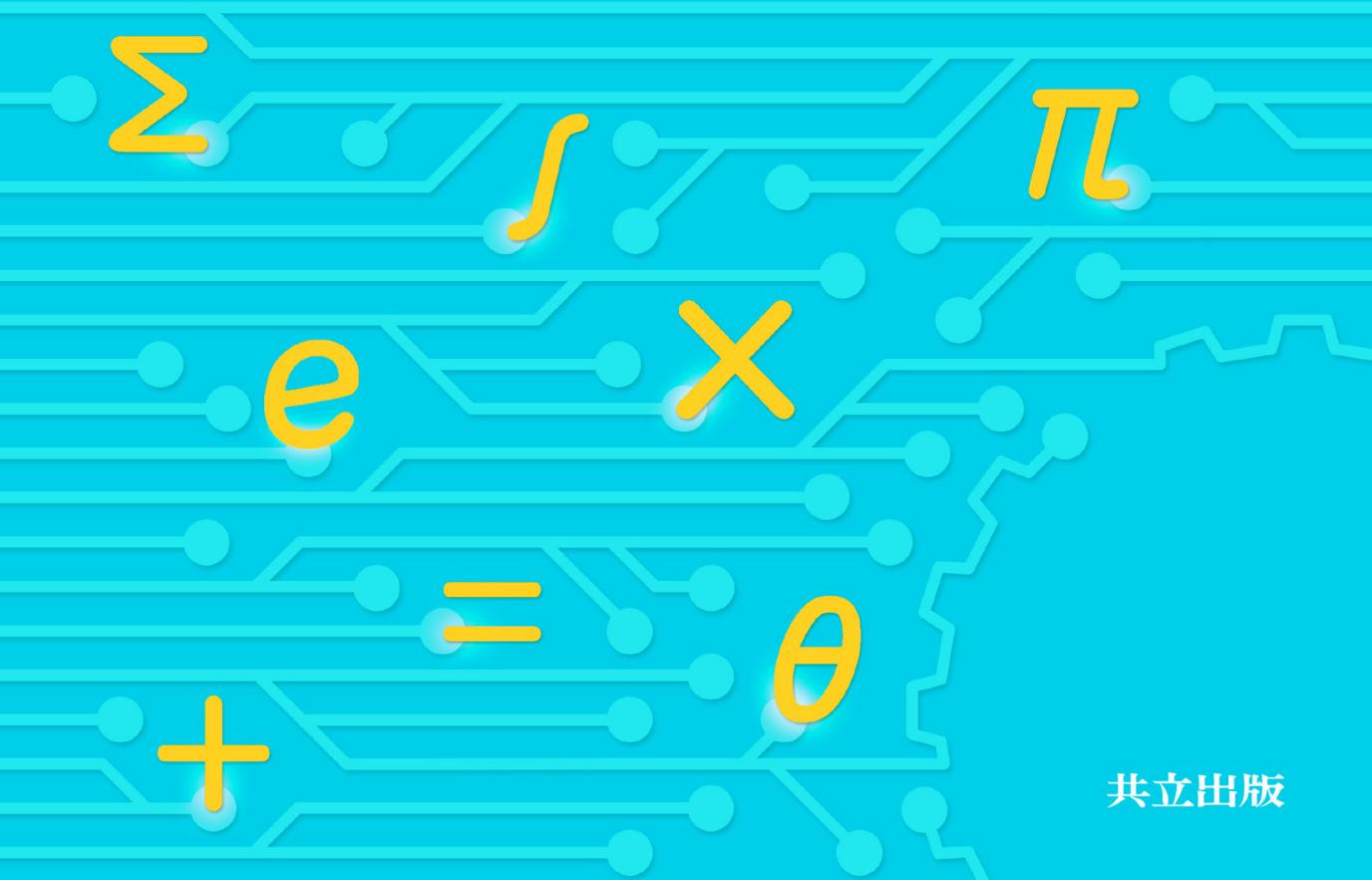


工学系学生のための 数学入門

石村 園子 著



共立出版

1 数と式の計算

展開公式

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (複号同順)
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (複号同順)
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (複号同順)

因数分解公式

平方根の計算

$a > 0, b > 0$ のとき

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$
- $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

2次方程式

- $ax^2 + bx + c = 0$ の解
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $ax^2 + 2bx + c = 0$ の解
- $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

解の公式

因数定理

多項式 $P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。

$\Leftrightarrow P(a) = 0$

i のきまり

- $i^2 = -1$
- $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i \quad (a > 0)$

2 関数とグラフ

直線

放物線

平行移動

$y = f(x)$

平行移動 $\uparrow x$ 軸方向 $\uparrow p$

$y - q = f(x - p)$

円

楕円

双曲線

3 指数関数 4 対数関数

指数関数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(n : 自然数 ; m : 整数)

$$a^p = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{pn} \quad (p \text{ : 無理数})$$

($p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \{p_n\}$: 有理数列)

指数法則

- $a^p a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $(ab)^p = a^p b^p$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

対数関数

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

($x > 0, a > 0, a \neq 1$)

底の変換

$$\log_q p = \frac{\log_a p}{\log_a q}$$

対数法則

- $\log_a pq = \log_a p + \log_a q$
- $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$
- $\log_a q^p = p \log_a q$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

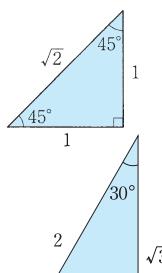
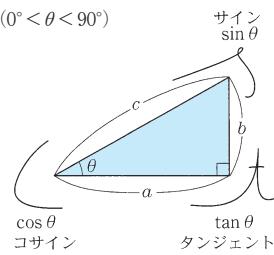
5 三角関数

三角比 $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

$$\sin \theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

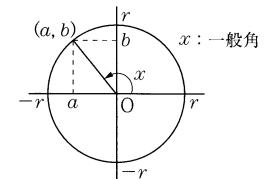


三角関数

$$\sin x = \frac{b}{r}$$

$$\cos x = \frac{a}{r}$$

$$\tan x = \frac{b}{a}$$

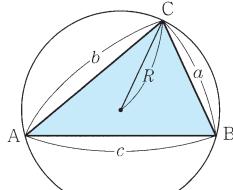
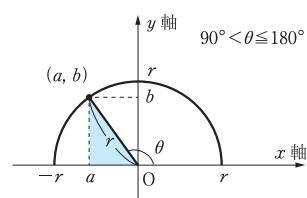
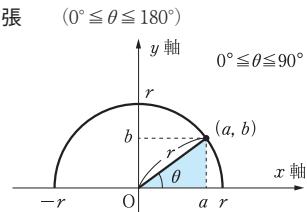


三角比の拡張

$$\sin \theta = \frac{b}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$



余弦定理

- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

正弦定理

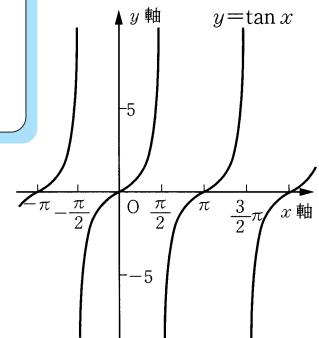
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

相互関係

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

度とラジアン

$$180^\circ = \pi \text{ (ラジアン)}$$



加法定理

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

(複号同順)

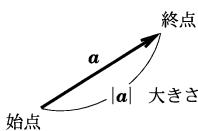
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\tan(-x) = -\tan x$

倍角公式

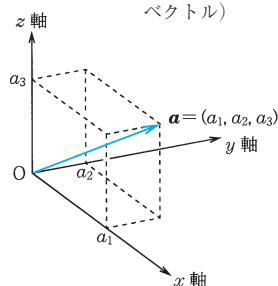
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

6 ベクトル

ベクトル(向きと大きさをもつ量)



位置ベクトル(始点を原点Oにとるベクトル)



$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$
- $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

内積

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$

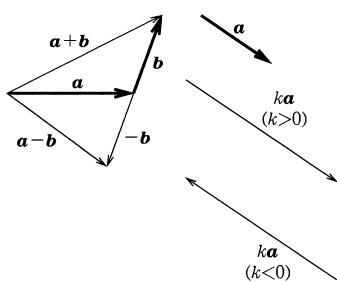
垂直条件

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

平行条件

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = k\mathbf{b}$$

和と差



$A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ のとき

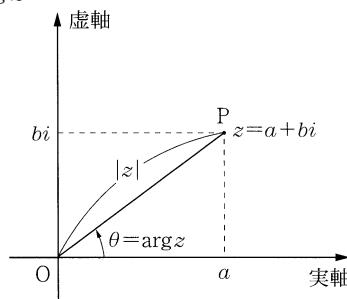
- $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$
- $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

7 複素平面と極形式

極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

絶対値 : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

偏角 : $\theta = \arg z$



極形式による積と商

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \{ \cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1) \}$$

ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

9 微 分

微分係数

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導関数の性質

$$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \quad (\text{複号同順})$$

$$\{kf(x)\}' = kf'(x) \quad (k \text{ は定数})$$

$$\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

合成関数の微分公式

$$y = f(g(x)), \quad u = g(x) \quad \text{のとき} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$k' = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(n は整数または分数)

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin ax)' = a \cos ax$$

$$(\cos ax)' = -a \sin ax$$

$$(\tan ax)' = \frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

接線の方程式

$y = f(x)$ の $x = a$ における

接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

関数の極値

$$f'(a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ で極値をとる可能性あり}$$

関数の増減

$$f'(a) > 0 \Rightarrow x = a \text{ で増加}$$

$$f'(a) < 0 \Rightarrow x = a \text{ で減少}$$

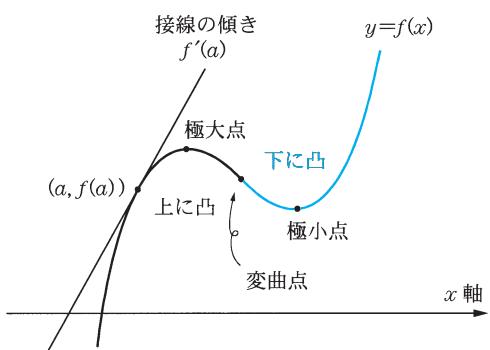
関数の変曲点

$$f''(a) = 0 \Rightarrow (a, f(a)) \text{ は変曲点の可能性あり}$$

関数の凸凹

$$f''(a) > 0 \Rightarrow x = a \text{ で下に凸}$$

$$f''(a) < 0 \Rightarrow x = a \text{ で上に凸}$$



8 極限

- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

無限級数
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき

- $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (k は定数)

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (複号同順)

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ($a \neq 0$) について

- $|r| < 1$ のとき 収束する

- $|r| \geq 1$ のとき 発散する

10 積 分

不定積分

$$F'(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

(C : 積分定数)

不定積分の性質

- $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx$ (複号同順)

$$= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k は定数)

置換積分(不定積分)

$$u = f(x) \text{ とおくと}$$

$$\int g(f(x))f'(x) dx = \int g(u) du$$

- $\int 1 dx = x + C$
- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
(n は整数または分数, $n \neq -1$)
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

部分積分(不定積分)

$$\int f(x)g'(x) dx$$

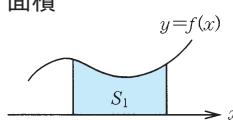
$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

定積分

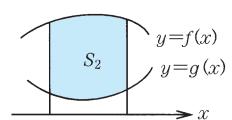
- $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

$$= F(b) - F(a)$$

面積



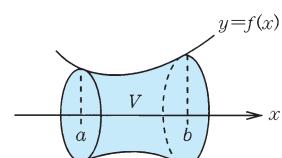
$$S_1 = \int_a^b f(x) dx$$



$$S_2 = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

回転体の体積

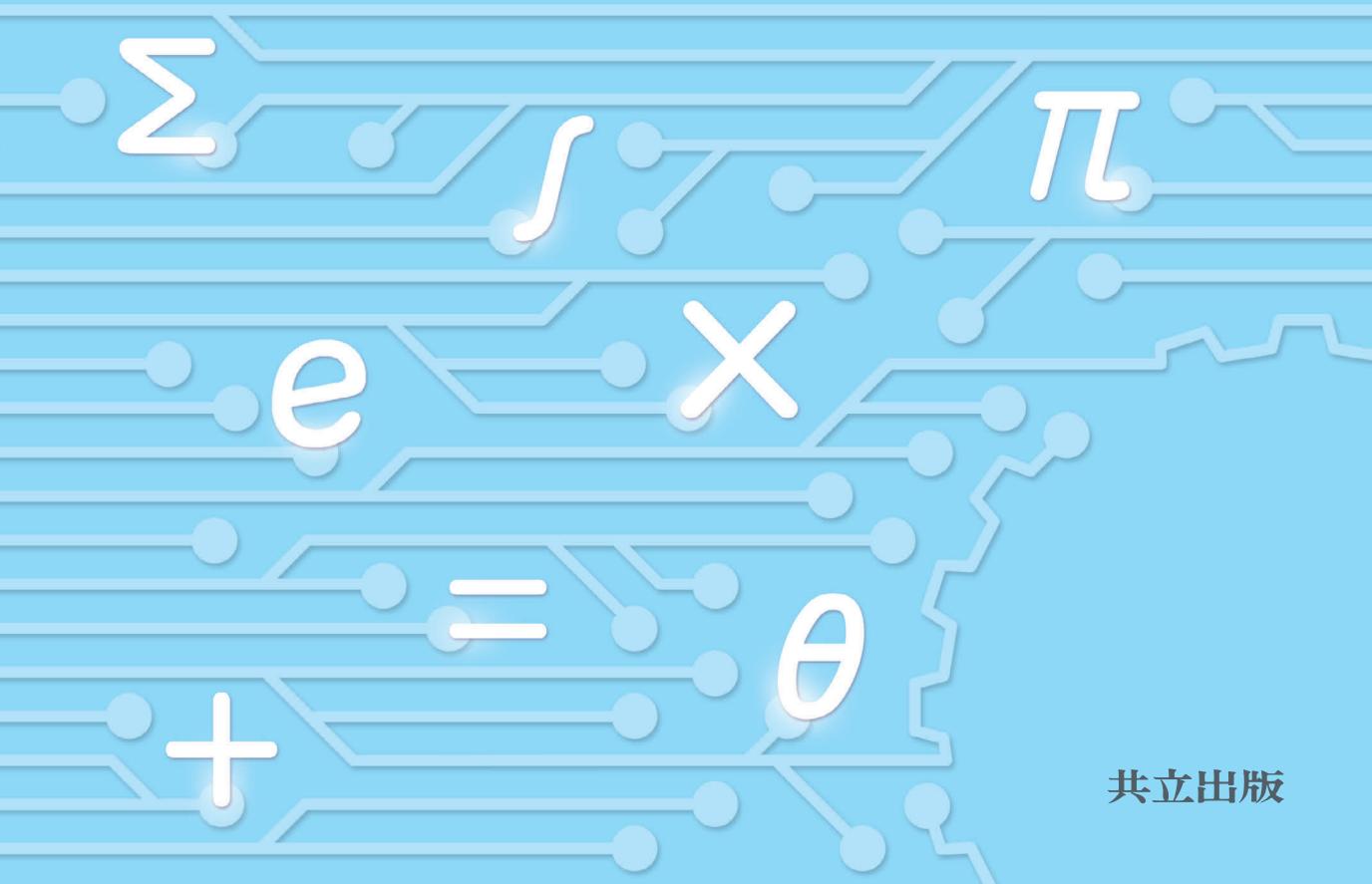
$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$



- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

工学系学生のための 数学入門

石村 園子 著



共立出版

まえがき

2016 年のアメリカ大統領選では、世界中の大方の予想に反し、トランプ氏が大統領に当選しました。黒人初のオバマ大統領の後は、女性初のクリントン大統領が誕生かと期待は大きかったのですが、アメリカ国民が選んだのはトランプ氏でした。移民の国であったはずのアメリカは移民の扉を狭くし、アメリカ社会が抱く問題を改めて強く考えさせられました。一方ヨーロッパでは、中東からの大量の難民が各国を大きく揺さぶり、とうとうイギリスが EU を離脱することになってしまいました。そして我が国に大きな影響を及ぼす北朝鮮問題も今きわどい局面に直面しています。

誰もが平穏な生活を願っているはずなのに、人類は『平和のために争う』という矛盾から抜け出すことはできないのでしょうか？

抜け出す英知を得るにはまだまだ時間がかかりそうですが、人類の英知を一歩一歩積み重ねていくのは我々一人ひとりです。今までの英知を学び、それを基にして新しい英知を創造する、それが学生の皆さんの務めです。命からがら海を渡りヨーロッパへ向かう大量の難民の列の映像がまだ記憶に鮮明に残っています。その映像もきっと現実のほんの一瞬でしかないのでしょう。大学でこれから勉強を始める機会を得られた学生の皆さん、自分の幸運をしっかりと締めてください。

本書は、大学で勉強するにあたり、高校数学と大学数学のギャップを埋めるために書かれた数学の入門書です。本書とは姉妹書にあたる

大学新入生のための数学入門 一増補版一

大学新入生のための微分積分入門

大学新入生のための線形代数入門

は、お陰さまで長い間多くの大学新入生の方々に使っていただきました。今回、特に工科系の学生向きの入門書のご要望にお応えし、先の2冊から工学専門分野の学習に必要な章を選んで加筆修正し

工学系学生のための数学入門

として出版することとなりました。工学系の学部、学科に入学したけれど、数学の学力にちょっと不安を覚えている新入生の皆さん、専門の授業が本格化する前にしっかりと基礎固めをしておいてください。

本書は基礎知識の簡単な復習からはじまり、例題と問題を解きながら基礎知識の確認をしていきます。最後の章には、各例題に合わせた練習問題もレベル別に載せてありますので利用してください。また、高校では学習しない内容もところどころにコラム等で解説してありますので、参考にしてください。

最後に、出版の企画等で長い間大変お世話になり、今回も本書の執筆を勧めてくださいました共立出版株式会社の重鎮、寿日出男氏に深く感謝申し上げます。また、編集作業では著者のわがままに耐え忍んでくださっている吉村修司さん、本書の営業では細かい気配りをくださっている稻沢会さんをはじめ、共立出版の皆様方に大変お世話になりました。この場をお借りしてお礼を申し上げます。

本書の説明役も他の姉妹書と同じく隣家のプードル犬、竹本ノエルちゃんです。

2017年 秋分

石村園子



もくじ

1 数と式の計算1

〈1〉 数と式の計算2

例題 1.1 [整数, 分数, 小数] 2

例題 1.2 [展開公式] 3

例題 1.3 [因数分解] 4

例題 1.4 [因数定理] 5

例題 1.5 [平方根] 6

例題 1.6 [複素数] 7

例題 1.7 [分数式の計算] 8

例題 1.8 [部分分数展開] 9

〈2〉 方程式10

例題 1.9 [1次方程式] 10

例題 1.10 [2次方程式] 11

例題 1.11 [連立1次方程式] 12

2 関数とグラフ13

〈0〉 関数14

〈1〉 直線15

例題 2.1 [直線] 15

〈2〉 放物線16

例題 2.2 [放物線1] 17

例題 2.3 [放物線2] 18

例題 2.4 [放物線と2次不等式] 19

例題 2.5 [最大・最小問題] 20

〈3〉 円	21
例題 2.6 [円]	21
〈4〉 楕円と双曲線	22
例題 2.7 [楕円と双曲線]	23
〈5〉 2つのグラフの共有点	24
例題 2.8 [2直線の共有点]	24
例題 2.9 [放物線と直線の共有点]	25
例題 2.10 [その他のグラフの共有点]	26

3 指数関数 27

〈1〉 指数と指数法則	28
例題 3.1 [指数]	29
例題 3.2 [指数法則]	30
〈2〉 指数関数とグラフ	31
例題 3.3 [指数関数のグラフ]	32
〈3〉 特別な指数関数 $y = e^x$	33
♪とくとく情報 [複利計算]	34

4 対数関数 35

〈1〉 対数と対数法則	36
例題 4.1 [対数]	36
例題 4.2 [対数法則]	37
例題 4.3 [底の変換]	38
〈2〉 常用対数と自然対数	39
例題 4.4 [対数の値]	39
〈3〉 対数関数とグラフ	40
例題 4.5 [対数関数のグラフ]	41
♪とくとく情報 [常用対数でがん研究?]	42

5 三角関数43

〈1〉 三角比44

例題 5.1 [三角比 1] 44

例題 5.2 [三角比 2] 46

例題 5.3 [三角比の相互関係 1] 47

例題 5.4 [三角比の相互関係 2] 48

例題 5.5 [正弦定理] 49

例題 5.6 [余弦定理] 50

〈2〉 ラジアン単位と一般角51

例題 5.7 [ラジアン] 51

例題 5.8 [一般角] 53

〈3〉 三角関数54

例題 5.9 [三角関数の値 1] 54

例題 5.10 [三角関数の値 2] 56

例題 5.11 [三角関数の値 3] 57

例題 5.12 [三角関数の相互関係] 58

〈4〉 三角関数のグラフ59

例題 5.13 [三角関数のグラフ] 61

〈5〉 三角関数の公式64

♪とくとく情報 [逆三角関数]66

6 ベクトル67

〈1〉 ベクトル68

例題 6.1 [ベクトル] 68

例題 6.2 [ベクトルの和, 差, スカラー倍] 69

〈2〉 空間ベクトル70

例題 6.3 [空間ベクトルの成分表示] 70

例題 6.4 [空間ベクトルの内積] 71

♪とくとく情報 [ベクトルの外積]72

〈3〉 空間における図形への応用73

例題 6.5 [空間における 2 点間の距離] 73

例題 6.6 [空間における線分の内分点] 75

例題 6.7 [空間における線分の外分点] 77

♪とくとく情報 [空間の基本ベクトル]78

7	複素平面と極形式	79
⟨1⟩	複素平面	80
例題 7.1	[複素平面]	80
⟨2⟩	極形式	81
例題 7.2	[極形式 1]	81
例題 7.3	[極形式 2]	82
例題 7.4	[ド・モアブルの定理]	83
♪とくとく情報 [オイラーの公式]		84
8	極限	85
⟨1⟩	関数の収束と発散	86
例題 8.1	[極限値 1]	87
例題 8.2	[極限値 2]	89
例題 8.3	[極限値 3]	90
⟨2⟩	関数の極限公式	92
⟨3⟩	無限級数	94
例題 8.4	[無限等比級数 1]	96
例題 8.5	[無限等比級数 2]	98
9	微分	99
⟨1⟩	微分係数	100
例題 9.1	[平均変化率]	100
例題 9.2	[微分係数]	102
⟨2⟩	導関数	103
例題 9.3	[導関数 1]	103
例題 9.4	[導関数 2]	104
⟨3⟩	微分計算	105
例題 9.5	[微分の基本計算 1]	105
例題 9.6	[微分の基本計算 2]	106
例題 9.7	[積の微分公式]	107
例題 9.8	[商の微分公式]	108
例題 9.9	[合成関数の微分 1]	109

例題 9.10 [合成関数の微分 2]	110
例題 9.11 [合成関数の微分 3]	111
例題 9.12 [接線の方程式]	112
⟨4⟩ 2階導関数	113
例題 9.13 [2階導関数]	113
⟨5⟩ 関数のグラフ	114
例題 9.14 [関数のグラフ 1]	116
例題 9.15 [関数のグラフ 2]	118
♪とくとく情報 [n階導関数と関数の展開]	
	120

10 積 分 121

⟨1⟩ 不定積分	122
例題 10.1 [不定積分の基本計算 1]	123
例題 10.2 [不定積分の基本計算 2]	124
例題 10.3 [不定積分の基本計算 3]	125
例題 10.4 [不定積分の基本計算 4]	126
例題 10.5 [置換積分 1]	127
例題 10.6 [置換積分 2]	128
例題 10.7 [部分積分]	129
⟨2⟩ 定積分	130
例題 10.8 [定積分の基本計算 1]	132
例題 10.9 [定積分の基本計算 2]	133
例題 10.10 [定積分の基本計算 3]	134
例題 10.11 [定積分の置換積分]	135
例題 10.12 [定積分の部分積分]	136
⟨3⟩ 面積	137
例題 10.13 [面積 1]	137
例題 10.14 [面積 2]	138
⟨4⟩ 回転体の体積	139
例題 10.15 [回転体の体積]	139
⟨5⟩ 広義積分と無限積分	140
例題 10.16 [広義積分]	140
例題 10.17 [無限積分]	141
♪とくとく情報 [曲線の長さ]	142

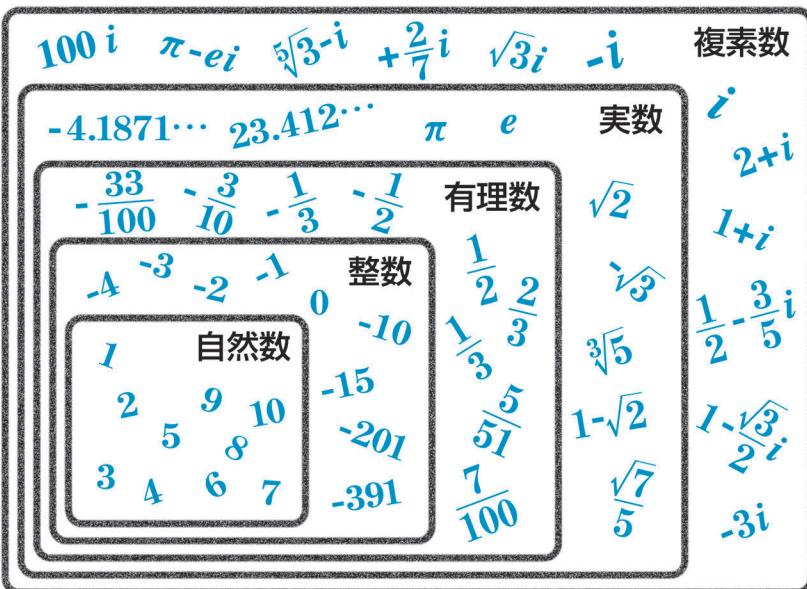
11 練習問題 143

- 1 数と式の計算 144
- 2 関数とグラフ 147
- 3 指数関数 150
- 4 対数関数 151
- 5 三角関数 152
- 6 ベクトル 155
- 7 複素平面と極形式 157
- 8 極限 158
- 9 微分 159
- 10 積分 163
- ♪とくとく情報 [微分と積分] 168

12 問題と練習問題の解答 169

さくいん 209

1 数と式の計算



基本の基本！
しっかり確認してね。



(1) 数と式の計算

例題 1.1 [整数, 分数, 小数]

次の計算をしてみましょう。

$$(1) 2 \times (-3)^2 - 4^2 \div 8 \times (-2)$$

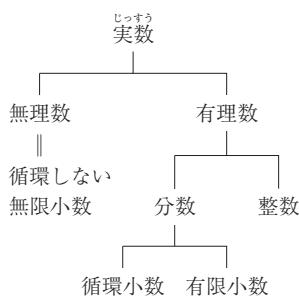
$$(2) \frac{1}{5} \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$(3) \{(2.9 - 2.6)^2 + (1.4 - 2.6)^2 + (3.5 - 2.6)^2\} \div 3$$

統計計算に使われます。❶

四則演算の規則

- +, − は左から順に計算
- ×, ÷ は左から順に計算
- ×, ÷ は +, − に優先
- カッコの中は優先して計算



解 小学校以来、慣れ親しんできた計算ですが、侮ってはいけません。きちんと変形しながら計算してみましょう。

$$(1) \text{与式} = 2 \times 9 - 16 \div 8 \times (-2)$$

$$= 18 - 2 \times (-2)$$

$$= 18 - (-4)$$

$$= 18 + 4$$

$$= 22$$

$$(2) \text{与式} = \frac{1}{5} \div \frac{10-3}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{5} \div \frac{7}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{21} + \frac{1}{3} = -\frac{2+7}{21} = -\frac{5}{21}$$

$$(3) \text{与式} = \{0.3^2 + (-1.2)^2 + 0.9^2\} \div 3$$

$$= (0.09 + 1.44 + 0.81) \div 3$$

$$= 2.34 \div 3$$

$$= 0.78$$

(解終)

“よしき”
“与式”とは問題に
与えられている式のことよ。
×, ÷ は左から順に
計算してね。



問題 1.1 (解答は p.170)

次の計算をしてください。

$$(1) (-6) \div \{3 - (-3)^2\} - 5 \times \{4 - (-3)\}$$

$$(2) \frac{1}{12} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{5}{6}\right) \times \frac{3}{8}$$

$$(3) \{3 \times (2.9^2 + 1.4^2 + 3.5^2) - (2.9 + 1.4 + 3.5)^2\} \div (3 \times 2)$$

例題 1.2 [展開公式]

展開公式を利用して、次の式を展開してみましょう。

(1) $(x+2y)^2$ (2) $(3a+b)(3a-b)$

(3) $(x+5)(x-2)$ (4) $(5a-1)(2a+3)$

(5) $(x+2y)^3$ (6) $(a+b-c)^2$

解 展開公式を思い出しながら展開しましょう。

(1) 与式 $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2$

$= x^2 + 4xy + 4y^2$

(2) 与式 $= (3a)^2 - b^2$

$= 9a^2 - b^2$

(3) 与式 $= x^2 + (5-2)x + 5 \cdot (-2)$

$= x^2 + 3x - 10$

(4) 与式 $= 5 \cdot 2a^2 + \{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2\}a + (-1) \cdot 3$

$= 10a^2 + 13a - 3$

(5) 与式 $= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3$

$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

(6) 与式 $= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2a(-c)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

(解終)

❶ **単項式** (数や文字の積) の和や差の形で表わされる式を整式または**多項式**といいます。

展開公式

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (複号同順)
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (複号同順)
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

3乗の公式もちゃんと覚えてね。



問題 1.2 (解答は p.170)

次の式を展開公式を使って展開してください。

(1) $(3x-y)^2$ (2) $(a+2b)(a-2b)$ (3) $(t-8)(t+4)$

(4) $\left(x - \frac{1}{3}y\right)^3$ (5) $(5x-2y)(4x+y)$ (6) $(a-b+c)^2$

多項式をいくつかの多項式
の積に分解することを因数
分解といいます。

(3) $a^2 + \cancel{4a} - 5$

たして 4, かけて -5 となる
2つの数をさがします。

たすきがけ

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$$

$$a \cancel{\times} b \rightarrow bc$$

$$c \cancel{\times} d \rightarrow ad$$

$$ad + bc$$

$$= (ax + b)(cx + d)$$

たすきがけは
いろいろな組合せを
ためしてみて。



例題 1.3 [因数分解]

次の式を因数分解してみましょう。

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| (1) $x^2 + 6x + 9$ | (2) $9a^2 - 4b^2$ |
| (3) $a^2 + 4a - 5$ | (4) $12x^2 - 11x + 2$ |
| (5) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ | (6) $a^3 + 8b^3$ |

解 展開公式はそのまま因数分解の公式にもなります。

- (1) 与式 $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$
 (2) 与式 $= (3a)^2 - (2b)^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$
 (3) 与式 $= (a + 5)(a - 1)$
 (4) “たすきがけ”により因数を見つけると

$$\begin{array}{r}
 12x^2 - 11x + 2 \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 4 \cancel{\times} - 1 \rightarrow -3 \\
 3 \cancel{\times} - 2 \rightarrow -8 \\
 \hline
 -11
 \end{array}$$

より

- 与式 $= (4x - 1)(3x - 2)$
 (5) 3乗の展開公式をよくみて
 与式 $= (t - 1)^3$
 (6) 与式 $= a^3 + (2b)^3$

$$\begin{aligned}
 &= (a + 2b)\{a^2 - a \cdot 2b + (2b)^2\} \\
 &= (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)
 \end{aligned}$$

(解終)

因数分解公式
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (複号同順)
 展開公式

問題 1.3 (解答は p. 170)

次の式を因数分解してください。

- | | | |
|----------------------|---------------------|----------------------------|
| (1) $16x^2 - 9y^2$ | (2) $t^2 - 6t - 16$ | (3) $15x^2 - x - 2$ |
| (4) $x^2 - 10x + 25$ | (5) $27x^3 - y^3$ | (6) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ |

例題 1.4 [因数定理]

因数定理を用いて次の式を素因数に分解してみましょう。

$$(1) \quad x^3 + 3x^2 - 4 \quad (2) \quad x^3 - x^2 - 3x + 6$$

因数定理

多項式 $P(x)$ は $(x - a)$ で割り切れる。

$$\Leftrightarrow P(a) = 0$$

解 素因数分解したい式を $P(x)$ とおきます。

(1) $P(a) = 0$ となる値 a をさがすと

$$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$$

「因数定理」より、 $P(x)$ は $(x - 1)$ を因数にもつことがわかるので、

$P(x)$ を $(x - 1)$ で割って (右の計算)

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

さらに因数分解して

$$= (x - 1)(x + 2)^2$$

(2) $P(a) = 0$ となる a をさがすと

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 6 \\ &= -8 - 4 + 6 + 6 = 0 \end{aligned}$$

これより $P(x)$ は $(x + 2)$ で割り切れることがわかるので、 $P(x)$ を

$(x + 2)$ で割って (右の計算)

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 3)$$

$(x^2 - 3x + 3)$ は実数の範囲ではもう因数分解できないので、これが求める素因数分解となります。 (解終)

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 4 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 3x^2 - 4} \\ x^3 - x^2 \\ \hline 4x^2 \\ 4x^2 - 4x \\ \hline 4x - 4 \\ 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 3 \\ x + 2 \overline{) x^3 - x^2 - 3x + 6} \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline -3x^2 - 3x \\ -3x^2 - 6x \\ \hline 3x + 6 \\ 3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

剩余の定理

多項式 $P(x)$ を $(x - a)$ で割ったときの余りは $P(a)$

$P(a) = 0$ なら “余りがない” ということなので $P(x)$ は $(x - a)$ で割り切れるのね。



問題 1.4 (解答は p.170)

因数定理を利用して素因数に分解してください。

$$(1) \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (2) \quad x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$$

平方根の計算

 $a > 0, b > 0$ のとき

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$
- $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

展開公式

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

例題 1.5 [平方根]

次の式を計算してみましょう。

(1) $(\sqrt{3}-1)^2 + \sqrt{27}$

(2) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

(3) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

(4) $\frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2}$

解 (1) 展開公式を使って

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2\} + \sqrt{3^2 \cdot 3} \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3\sqrt{3} = 4 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 展開公式を使うと

与式 $= (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 2 - 3 = 18 - 3 = 15$

(3) 分母, 分子に $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ をかけて分母を有理化する

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

展開公式を使って計算すると

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{5 + 2\sqrt{10} + 2}{5 - 2} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

(4) 展開公式を使って分母を計算すると

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{18} + 6} \\ &= \frac{1}{9 + 2\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \frac{1}{9 + 2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{3(3 + 2\sqrt{2})} \end{aligned}$$

分母, 分子に $(3 - 2\sqrt{2})$ をかけて分母を有理化すると

$$\begin{aligned} &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3[3^2 - (2\sqrt{2})^2]} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3(9 - 4 \cdot 2)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3(9 - 8)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad \text{(解終)}$$

問題 1.5 (解答は p.170)

次の式を計算してください。

(1) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24}$

(2) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$

(3) $\frac{2 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$

例題 1.6 [複素数]

次の複素数の計算をしてみましょう。

$$(1) (5+2i)(3-i) \quad (2) (4-3i)^2$$

$$(3) \frac{3-2i}{3+2i} \quad (4) \frac{3}{1+i} + \frac{2}{1-i}$$

— ***i* のきまり —**

- $i^2 = -1$
- $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i \quad (a > 0)$

解 *i* は虚数単位とよばれます。

(1) まず展開公式を使って展開すると

$$\text{与式} = 5 \cdot 3 + \{5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3\}i + 2i \cdot (-i) = 15 + i - 2i^2$$

$i^2 = -1$ なので

$$= 15 + i - 2 \cdot (-1) = 15 + i + 2 = 17 + i$$

(2) 展開公式で展開して

$$\text{与式} = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3i + (3i)^2 = 16 - 24i + 9i^2$$

$$= 16 - 24i + 9 \cdot (-1) = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

(3) 平方根の計算と同様に、分母、分子に $(3+2i)$ の共役複素数 $(3-2i)$ をかけて計算すると

$$\text{与式} = \frac{(3-2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)}$$

展開公式で展開して

$$= \frac{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2}{3^2 - (2i)^2} = \frac{9 - 12i + 4 \cdot i^2}{9 - 2^2 \cdot i^2}$$

$$= \frac{9 - 12i + 4 \cdot (-1)}{9 - 4 \cdot (-1)} = \frac{9 - 12i - 4}{9 + 4} = \frac{5 - 12i}{13}$$

(4) 通分して

$$\text{与式} = \frac{3(1-i) + 2(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3 - 3i + 2 + 2i}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{5 - i}{1 - (-1)} = \frac{5 - i}{2} \quad (\text{解終})$$

— **複素数とは**
***a+bi* (*a, b* は実数)**
と表わせる数のことよ。



— ***a+bi* に対して *a-bi* を共役複素数といいます。**

— ***i* の性質 —**

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

問題 1.6 (解答は p.171)

次の式を計算してください。

$$(1) (3-2i)(2+3i)$$

$$(2) \frac{5+2i}{5-2i}$$

$$(3) \frac{4}{2+i} - \frac{1}{2-i}$$

警告！

$$\frac{3}{x+3} \neq \frac{3}{x} + \frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{x-2} \neq \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

❶ 間違えやすい例をこのように「警告！」します。同じ間違えをしていないかよく注意してください。

共通分母を
 $(x-2)(x-1)^2(x+1)$
としてしまったら、あとで約分が必要よ。



例題 1.7 [分数式の計算]

次の分数式の計算をしてみましょう。

$$(1) \frac{x-y}{x+y} \times \frac{x^2-y^2}{x^2-xy}$$

$$(2) \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2}$$

$$(3) \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-1}$$

解 分数式は有理式ともよばれます。

(1) 因数分解ができるところはしておき、約分すると

$$\text{与式} = \frac{x-y}{x+y} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x(x-y)} = \frac{x-y}{x}$$

(2) 通分して計算すると

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{3(x-2)-(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{3x-6-x-3}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{2x-9}{(x+3)(x-2)} \end{aligned}$$

(3) 分母を因数分解して通分すると

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{(x-2)(x-1)} - \frac{1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-2)}{(x-2)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3}{(x-2)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

(解終)

問題 1.7 (解答は p.171)

次の式を計算してください。

$$(1) \frac{x^2-2x}{x^2-5x-6} \times \frac{x-6}{x-2}$$

$$(2) \frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

$$(3) \frac{3x-1}{x(x+1)} - \frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

例題 1.8 [部分分数展開]

次の有理式をみたす定数 a, b, c を求めて、有理式を部分分数に展開してみましょう。

$$(1) \frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

$$(2) \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$$

解 右辺を通分し、分子が左辺と等しくなるように a, b, c を決めます。

$$(1) \text{ 右辺} = \frac{a(x+3) + b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{ax+3a+bx-b}{(x-1)(x+3)} \\ = \frac{(a+b)x+(3a-b)}{(x-1)(x+3)}$$

この分子を左辺の分子と比較すると、

$$\left. \begin{array}{l} a+b=0 \\ 3a-b=4 \end{array} \right\} \text{これを解くと} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array} \right. \\ \therefore \frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+3} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$$

$$(2) \text{ 右辺} = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + cx^2}{x^2(x+1)}$$

(1)とは異なった方法で求めてみましょう。左辺と右辺の分子を比較すると

$$1 = ax(x+1) + b(x+1) + cx^2$$

ここで x に 3 つの適当な値を代入して、 a, b, c の関係式を 3 つ求めます。

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ を代入} \quad 1=0+b+0 \\ x=-1 \text{ を代入} \quad 1=0+0+c \\ x=1 \text{ を代入} \quad 1=2a+2b+c \end{array} \right\} \text{これを解くと} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{array} \right.$$

$$\therefore \frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \quad (\text{解終})$$

分母の因数で分数式を展開することを“部分分数展開”といつた。



通分するとき、分母に気をつけましょう。

問題 1.8 のヒント

(1) 分母を因数分解しましょう。

$$(2) \text{ 与式} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$(3) \text{ 与式} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

問題 1.8 (解答は p.171)

次の式を部分分数に展開してください。

$$(1) \frac{6}{x^2+4x-5} \quad (2) \frac{1}{x(x+1)^2} \quad (3) \frac{1}{x(x^2+1)}$$

(2) 方程式

例題 1.9 [1 次方程式]

次の 1 次方程式を解いてみましょう。

$$(1) \ 5x - 3 = 3x - 5 \quad (2) \ 0.2x - 1 = 0.5$$

$$(3) \ \frac{7}{2}x - 4 = \frac{2}{3} \quad (4) \ \sqrt{5}x = 2 - \sqrt{3}x$$

解 方程式に含まれている x の最高次数は 1 なので、すべての方程式は 1 次方程式です。 $ax + b = 0 (a \neq 0)$ の形に直して x を求めましょう。

$$(1) \ 5x - 3x = 3 - 5 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$$

$$(2) \ 0.2x = 1 + 0.5 \rightarrow 0.2x = 1.5$$

両辺を 10 倍して

$$2x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{2} \rightarrow x = 7.5$$

$$(3) \ \frac{7}{2}x = 4 + \frac{2}{3} \rightarrow \frac{7}{2}x = \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{14}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

$$(4) \ \sqrt{5}x + \sqrt{3}x = 2 \rightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{3})x = 2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

(解終)

有理化しておきます。☞

(3)は両辺を 6 倍してもいいわね。



問題 1.9 (解答は p. 172)

次の 1 次方程式を解いてください。

$$(1) \ 3.4x - 0.7 = 0.3 - 0.6x \quad (2) \ \frac{7}{6}x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}x + 2 \quad (3) \ \sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$