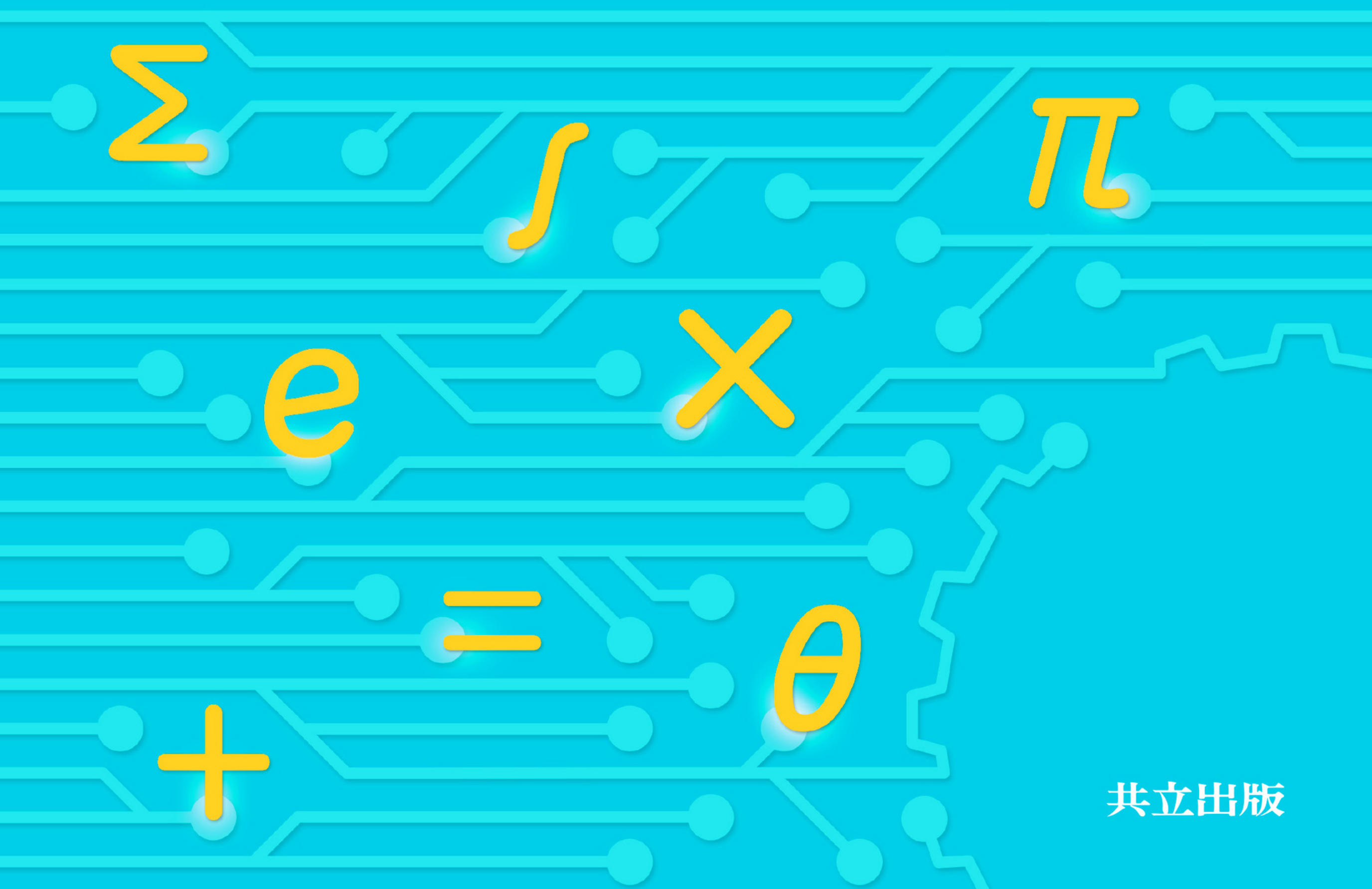
工学系学生のための
数学入門

石村 園子 著



共立出版

❶ 数と式の計算

展開公式

- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　（複号同順）
- $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　（複号同順）
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$　（複号同順）

因数分解公式

平方根の計算

$a>0,\ b>0$ のとき

- $(\sqrt{a})^2=a$
- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

2 次方程式

- $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- $ax^2+2b'x+c=0$ の解

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

解の公式

因数定理

多項式 $P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。

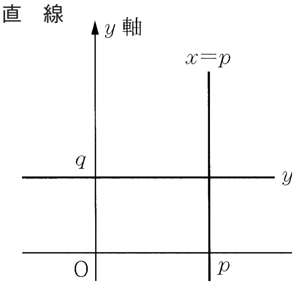
$\iff$　$P(a)=0$

i のきまり

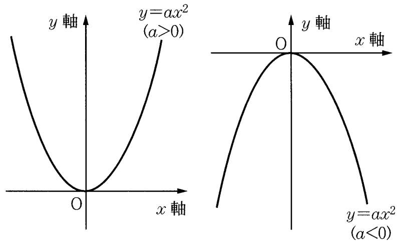
- $i^2=-1$
- $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　$(a>0)$

❷ 関数とグラフ

直　線



放物線



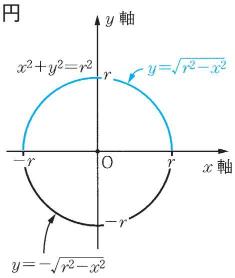
平行移動

$y=f(x)$

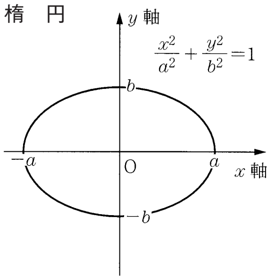
平行移動 x 軸方向へ p 、y 軸方向へ q

$y-q=f(x-p)$

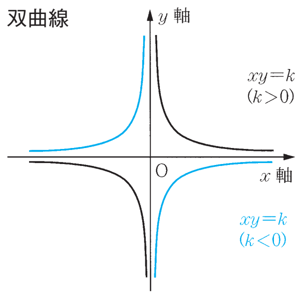
円

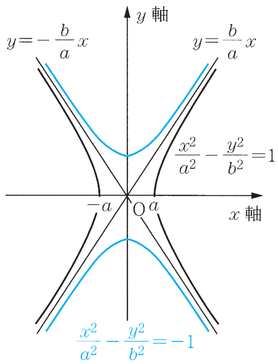


楕　円



双曲線





❸ 指数関数　❹ 対数関数

指数関数　$y=a^x$　$(a>0,\ a\neq 1)$

$a^0=1,\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

（n：自然数；m：整数）

$a^p=\lim\limits_{n\to\infty}a^{p_n}$　（p：無理数）

（$p=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$，$\{p_n\}$：有理数列）

指数法則

- $a^pa^q=a^{p+q}$
- $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$
- $(a^p)^q=a^{pq}$
- $(ab)^p=a^pb^p$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$

対数関数　$y=\log_a x \iff x=a^y$

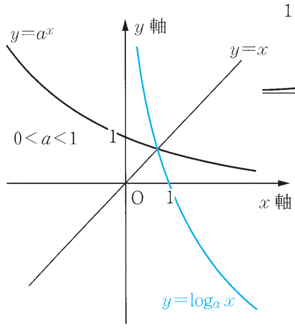
$(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

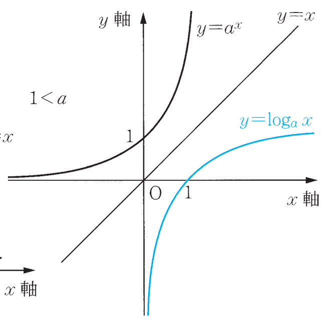
底の変換

- $\log_q p=\dfrac{\log_a p}{\log_a q}$

対数法則

- $\log_a pq=\log_a p+\log_a q$
- $\log_a \dfrac{p}{q}=\log_a p-\log_a q$
- $\log_a q^p=p\log_a q$





- $\log_a a=1$
- $\log_a 1=0$

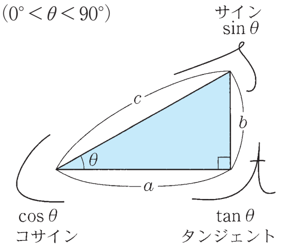
⑤ 三角関数

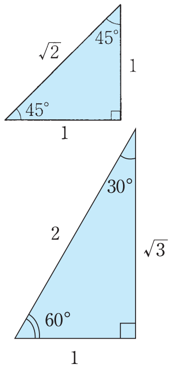
三角比　(0°＜θ＜90°)

$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$

$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$



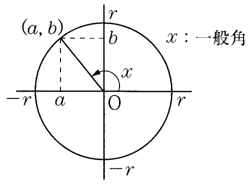


三角関数

$\sin x=\dfrac{b}{r}$

$\cos x=\dfrac{a}{r}$

$\tan x=\dfrac{b}{a}$

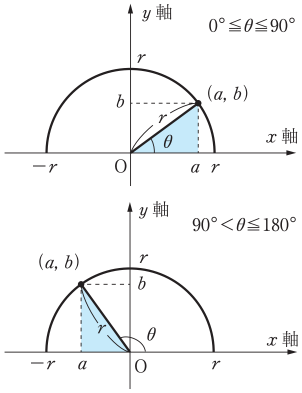


三角比の拡張　(0°≦θ≦180°)

$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

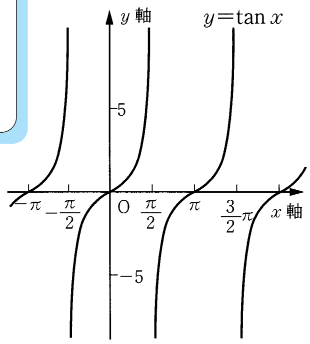


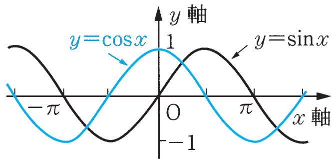
相互関係

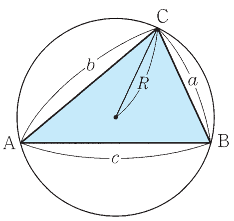
- $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

度とラジアン

180°＝π（ラジアン）







余弦定理

- $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
- $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

正弦定理

- $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

加法定理

- $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

（複号同順）

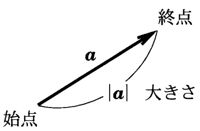
- $\sin(-x)=-\sin x$
- $\cos(-x)=\cos x$
- $\tan(-x)=-\tan x$

倍角公式（ばいかく）

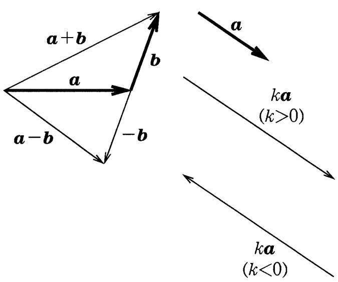
- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
  $=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
- $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

⑥ ベクトル

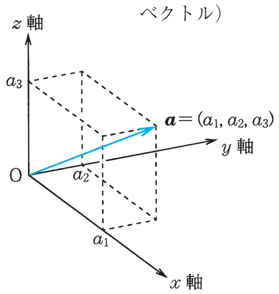
ベクトル(向きと大きさをもつ量)



和と差　　スカラー倍



位置ベクトル(始点を原点Oにとるベクトル)

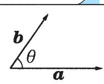


$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ のとき

- $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3)$
- $k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$

内積

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$



垂直条件

- $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

平行条件

- $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$

A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) のとき

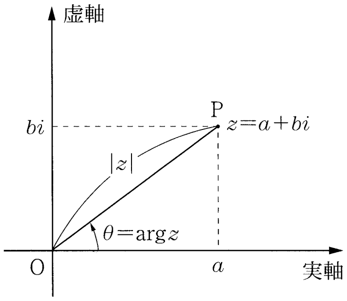
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$
- $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

❼ 複素平面と極形式

極形式　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

絶対値：$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

偏角：$\theta=\arg z$



極形式による積と商

- $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
- $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)\}$

ド・モアブルの定理

- $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$
- $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

❾ 微　分

微分係数

- $f'(p)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$

導関数

- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

接線の方程式

$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の方程式は

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

導関数の性質

- $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$　（複号同順）
- $\{kf(x)\}'=kf'(x)$　（k は定数）
- $\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
- $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
- $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

関数の極値

- $f'(a)=0\ \Rightarrow$ $x=a$ で極値をとる可能性あり

関数の増減

- $f'(a)>0\ \Rightarrow\ x=a$ で増加
- $f'(a)<0\ \Rightarrow\ x=a$ で減少

合成関数の微分公式

$y=f(g(x))$，$u=g(x)$　のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

関数の変曲点

- $f''(a)=0\ \Rightarrow$ $(a,f(a))$ は変曲点の可能性あり

関数の凸凹

- $f''(a)>0\ \Rightarrow\ x=a$ で下に凸
- $f''(a)<0\ \Rightarrow\ x=a$ で上に凸

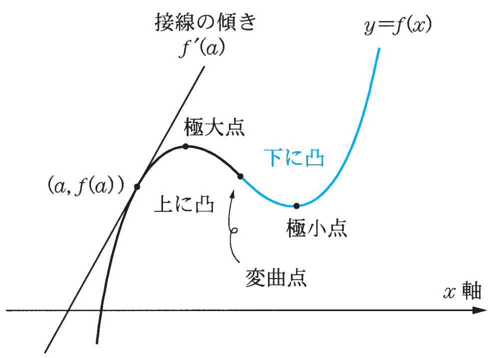
- $k'=0$（k は定数）
- $(x^n)'=nx^{n-1}$
 （n は整数または分数）

- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

- $(e^x)'=e^x$
- $(e^{ax})'=ae^{ax}$

- $(\sin ax)'=a\cos ax$
- $(\cos ax)'=-a\sin ax$
- $(\tan ax)'=\dfrac{a}{\cos^2 ax}$

- $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$



❽ 極　限

- $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

- $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

無限級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束するとき

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　(k は定数)
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$　(複号同順)

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\ (a\neq0)$ について

- $|r|<1$ のとき 収束する
- $|r|\geqq1$ のとき 発散する

❿ 積　分

不定積分

$F'(x)=f(x)$

$\displaystyle\iff\int f(x)\,dx=F(x)+C$

(C：積分定数)

不定積分の性質

- $\displaystyle\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx$　(複号同順)

  $\displaystyle=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　(k は定数)

置換積分(不定積分)

$u=f(x)$ とおくと

$\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\,dx=\int g(u)\,du$

- $\displaystyle\int 1\,dx=x+C$
- $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

  (n は整数または分数, $n\neq-1$)
- $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

部分積分(不定積分)

- $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx$

  $\displaystyle=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

定積分

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$

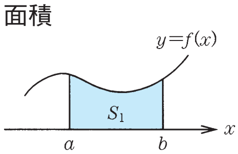
  $=F(b)-F(a)$

- $\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
- $\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$
- $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$

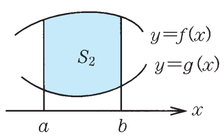
- $\displaystyle\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$
- $\displaystyle\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

- $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$
- $\displaystyle\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$

面積



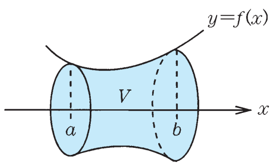
$\displaystyle S_1=\int_a^b f(x)dx$



$\displaystyle S_2=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

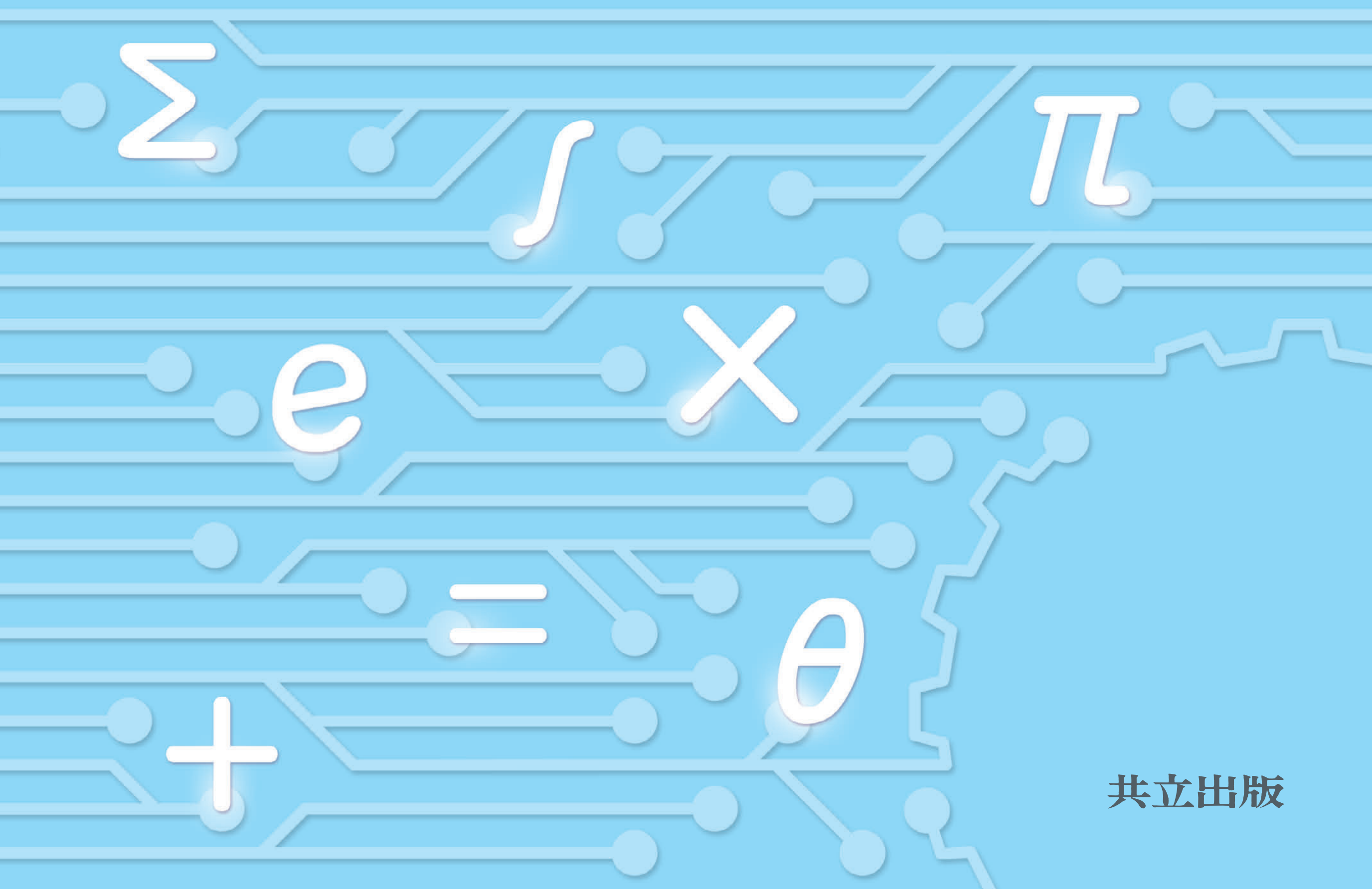
回転体の体積

$\displaystyle V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$



工学系学生のための
数学入門

石村 園子 著



共立出版

まえがき

2016 年のアメリカ大統領選では，世界中の大方の予想に反し，トランプ氏が大統領に当選しました。黒人初のオバマ大統領の後は，女性初のクリントン大統領が誕生かと期待は大きかったのですが，アメリカ国民が選んだのはトランプ氏でした。移民の国であったはずのアメリカは移民の扉を狭くし，アメリカ社会が抱く問題を改めて強く考えさせられました。一方ヨーロッパでは，中東からの大量の難民が各国を大きく揺さぶり，とうとうイギリスが EU を離脱することになってしまいました。そして我が国に大きな影響を及ぼす北朝鮮問題も今きわどい局面に直面しています。

誰もが平穏な生活を願っているはずなのに，人類は『平和のために争う』という矛盾から抜け出すことはできないのでしょうか？

抜け出す英知を得るにはまだまだ時間がかかりそうですが，人類の英知を一歩一歩積み重ねていくのは我々一人ひとりです。今までの英知を学び，それを基にして新しい英知を創造する，それが学生の皆さんの務めです。命からがら海を渡りヨーロッパへ向かう大量の難民の列の映像がまだ記憶に鮮明に残っています。その映像もきっと現実のほんの一瞬でしかないのでしょう。大学でこれから勉強を始める機会を得られた学生の皆さん，自分の幸運をしっかりかみ締めてください。

本書は，大学で勉強するにあたり，高校数学と大学数学のギャップを埋めるために書かれた数学の入門書です。本書とは姉妹書にあたる

　　大学新入生のための数学入門 —増補版—
　　大学新入生のための微分積分入門
　　大学新入生のための線形代数入門

は，お陰さまで長い間多くの大学新入生の方々に使っていただきました。今回，特に工科系の学生向きの入門書のご要望にお応えし，先の2冊から工学専門分野の学習に必要な章を選んで加筆修正し

工学系学生のための数学入門

として出版することとなりました。工学系の学部，学科に入学したけれど，数学の学力にちょっと不安を覚えている新入生の皆さん，専門の授業が本格化する前にしっかりと基礎固めをしておいてください。

本書は基礎知識の簡単な復習からはじまり，例題と問題を解きながら基礎知識の確認をしていきます。最後の章には，各例題に合わせた練習問題もレベル別に載せてありますので利用してください。また，高校では学習しない内容もところどころにコラム等で解説してありますので，参考にしてください。

最後に，出版の企画等で長い間大変お世話になり，今回も本書の執筆を勧めてくださいました共立出版株式会社の重鎮，寿日出男氏に深く感謝申し上げます。また，編集作業では著者のわがままに耐え忍んでくださっている吉村修司さん，本の営業では細かい気配りをしてくださっている稲沢会さんをはじめ，共立出版の皆様方に大変お世話になりました。この場をお借りしてお礼を申し上げます。

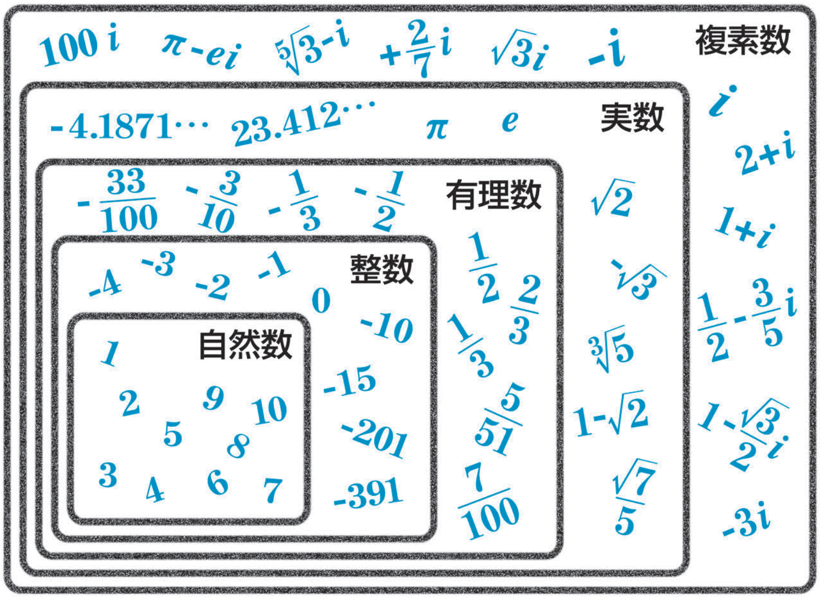
本書の説明役も他の姉妹書と同じく隣家のプードル犬，竹本ノエルちゃんです。

2017年　秋分

石村園子

もくじ

❶ 数と式の計算


複素数
100i　π-ei　∛3-i　+2/7i　√3i　-i　i　2+i　1+i　1/2-3/5i　1-√3/2i　-3i
実数
-4.1871…　23.412…　π　e　√2　-√3　∛5　1-√2　√7/5
有理数
-33/100　-3/10　-1/3　-1/2　1/2　2/3　1/3　5/51　7/100
整数
-4　-3　-2　-1　0　-10　-15　-201　-391
自然数
1　2　3　4　5　6　7　8　9　10


基本の基本！
しっかり確認してね。

〈1〉　数と式の計算

例題 1.1 ［整数，分数，小数］

次の計算をしてみましょう。

（1）　$2\times(-3)^2-4^2\div 8\times(-2)$

（2）　$\dfrac{1}{5}\div\left(2-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$

（3）　$\{(2.9-2.6)^2+(1.4-2.6)^2+(3.5-2.6)^2\}\div 3$

統計計算に使われます。➡

四則演算の規則

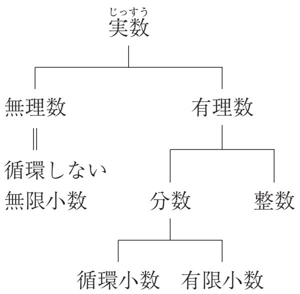
- ＋，－は左から順に計算
- ×，÷は左から順に計算
- ×，÷は＋，－に優先
- カッコの中は優先して計算

解　小学校以来，慣れ親しんできた計算ですが，侮ってはいけません。きちんと変形しながら計算してみましょう。

（1）　与式 $=2\times 9-16\div 8\times(-2)$
$=18-2\times(-2)$
$=18-(-4)$
$=18+4$
$=\boxed{22}$

（2）　与式 $=\dfrac{1}{5}\div\dfrac{10-3}{5}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$
$=\dfrac{1}{5}\div\dfrac{7}{5}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$
$=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{5}{7}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$
$=-\dfrac{2}{21}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-2+7}{21}=\boxed{\dfrac{5}{21}}$

（3）　与式 $=\{0.3^2+(-1.2)^2+0.9^2\}\div 3$
$=(0.09+1.44+0.81)\div 3$
$=2.34\div 3$
$=\boxed{0.78}$　　　　（解終）



問題 1.1（解答は p. 170）

次の計算をしてください。

（1）　$(-6)\div\{3-(-3)^2\}-5\times\{4-(-3)\}$

（2）　$\dfrac{1}{12}-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}\right)\div\left(-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{3}{8}$

（3）　$\{3\times(2.9^2+1.4^2+3.5^2)-(2.9+1.4+3.5)^2\}\div(3\times 2)$

例題 1.2［展開公式］

展開公式を利用して，次の式を展開してみましょう。

（1） $(x+2y)^2$　　（2） $(3a+b)(3a-b)$

（3） $(x+5)(x-2)$　　（4） $(5a-1)(2a+3)$

（5） $(x+2y)^3$　　（6） $(a+b-c)^2$

解　展開公式を思い出しながら展開しましょう。

（1） 与式 $=x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2$

$=x^2+4xy+4y^2$

（2） 与式 $=(3a)^2-b^2$

$=9a^2-b^2$

（3） 与式 $=x^2+(5-2)x+5\cdot(-2)$

$=x^2+3x-10$

（4） 与式 $=5\cdot 2a^2+\{5\cdot 3+(-1)\cdot 2\}a+(-1)\cdot 3$

$=10a^2+13a-3$

（5） 与式 $=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

（6） 与式 $=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2b(-c)+2a(-c)$

$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$　　（解終）

単項式（数や文字の積）の和や差の形で表わされる式を整式または多項式といいます。

展開公式

- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　（複号同順）
- $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　（複号同順）
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

問題 1.2（解答は p.170）

次の式を展開公式を使って展開してください。

（1） $(3x-y)^2$　　（2） $(a+2b)(a-2b)$　　（3） $(t-8)(t+4)$

（4） $\left(x-\dfrac{1}{3}y\right)^3$　　（5） $(5x-2y)(4x+y)$　　（6） $(a-b+c)^2$

例題 1.3［因数分解］

次の式を因数分解してみましょう。

（1）x^2+6x+9　（2）$9a^2-4b^2$

（3）a^2+4a-5　（4）$12x^2-11x+2$

（5）t^3-3t^2+3t-1　（6）a^3+8b^3

多項式をいくつかの多項式の積に分解することを**因数分解**（いんすうぶんかい）といいます。

解　展開公式はそのまま因数分解の公式にもなります。

（1）与式 $=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$

（2）与式 $=(3a)^2-(2b)^2=(3a+2b)(3a-2b)$

（3）与式 $=(a+5)(a-1)$

(3)　$a^2+\underset{\uparrow}{4}a\underset{\uparrow}{-5}$

たして 4，かけて -5 となる 2 つの数をさがします。

（4）“たすきがけ”により因数を見つけると

$$12x^2\ \boxed{-11}\,x+\ 2$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \times & -1 & \rightarrow & -3 \\ 3 & & -2 & \rightarrow & -8 \\ \hline & & & & -11 \end{array}$$

より

与式 $=(4x-1)(3x-2)$

（5）3 乗の展開公式をよくみて

与式 $=(t-1)^3$

（6）与式 $=a^3+(2b)^3$

$=(a+2b)\{a^2-a\cdot 2b+(2b)^2\}$

$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$　（解終）

たすきがけ

$acx^2+(ad+bc)x+bd$

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ & & & & ad+bc \end{array}$$

$=(ax+b)(cx+d)$

たすきがけは
いろいろな組合せを
ためしてみて。

因数分解公式

■ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$　（複号同順）

展開公式

問題 1.3（解答は p. 170）

次の式を因数分解してください。

（1）$16x^2-9y^2$　（2）$t^2-6t-16$　（3）$15x^2-x-2$

（4）$x^2-10x+25$　（5）$27x^3-y^3$　（6）$a^3+6a^2+12a+8$

例題 1.4［因数定理］

因数定理を用いて次の式を素因数に分解してみましょう。

（1） x^3+3x^2-4　　（2） x^3-x^2-3x+6

> **因数定理**
> 多項式 $P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。
> $\Longleftrightarrow$ $P(a)=0$

解　素因数分解したい式を $P(x)$ とおきます。

（1） $P(a)=0$ となる値 a をさがすと

$$P(1)=1^3+3\cdot1^2-4=1+3-4=0$$

「因数定理」より，$P(x)$ は $(x-1)$ を因数にもつことがわかるので，$P(x)$ を $(x-1)$ で割って（右の計算）

$$P(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$$

さらに因数分解して

$$=\boxed{(x-1)(x+2)^2}$$

⇦ 実数係数を用いてもうこれ以上因数分解できない式を素因数といいます。

⇦ $a=-2$ でも $P(-2)=0$

$$\begin{array}{r}
x^2+4x+4 \\
x-1\,\overline{)\,x^3+3x^2-4} \\
\underline{x^3-x^2} \\
4x^2 \\
\underline{4x^2-4x} \\
4x-4 \\
\underline{4x-4} \\
0
\end{array}$$

（2） $P(a)=0$ となる a をさがすと

$$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+6$$
$$=-8-4+6+6=0$$

これより $P(x)$ は $(x+2)$ で割り切れることがわかるので，$P(x)$ を $(x+2)$ で割って（右の計算）

$$P(x)=\boxed{(x+2)(x^2-3x+3)}$$

(x^2-3x+3) は実数の範囲ではもう因数分解できないので，これが求める素因数分解となります。　（解終）

$$\begin{array}{r}
x^2-3x+3 \\
x+2\,\overline{)\,x^3-x^2-3x+6} \\
\underline{x^3+2x^2} \\
-3x^2-3x \\
\underline{-3x^2-6x} \\
3x+6 \\
\underline{3x+6} \\
0
\end{array}$$

> **剰余の定理**
> 多項式 $P(x)$ を $(x-a)$ で割ったときの余りは $P(a)$

問題 1.4（解答は p. 170）

因数定理を利用して素因数に分解してください。

（1） x^3-2x^2-x+2　　（2） $x^4-x^3-5x^2+3x+6$

平方根の計算

$a>0,\ b>0$ のとき

- $(\sqrt{a})^2=a$
- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

展開公式

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(ax+b)(cx+d)$
  $=acx^2+(ad+bc)x$
  $+bd$

例題 1.5［平方根］

次の式を計算してみましょう。

（1）　$(\sqrt{3}-1)^2+\sqrt{27}$　　（2）　$(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$

（3）　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$　　（4）　$\dfrac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}$

解　（1）　展開公式を使って

$$与式=\{(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2\}+\sqrt{3^2\cdot 3}$$
$$=3-2\sqrt{3}+1+3\sqrt{3}=\boxed{4+\sqrt{3}}$$

（2）　展開公式を使うと

$$与式=(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=9\cdot 2-3=18-3=\boxed{15}$$

（3）　分母，分子に $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ をかけて分母を**有理化**（ゆうりか）すると

$$与式=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$

展開公式を使って計算すると

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{5+2\sqrt{10}+2}{5-2}=\boxed{\frac{7+2\sqrt{10}}{3}}$$

（4）　展開公式を使って分母を計算すると

$$与式=\frac{1}{(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}=\frac{1}{3+2\sqrt{18}+6}$$
$$=\frac{1}{9+2\sqrt{3^2\cdot 2}}=\frac{1}{9+2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{3(3+2\sqrt{2})}$$

分母，分子に $(3-2\sqrt{2})$ をかけて分母を有理化すると

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{3(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3\{3^2-(2\sqrt{2})^2\}}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{3(9-4\cdot 2)}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3(9-8)}=\boxed{\frac{3-2\sqrt{2}}{3}}$$

（解終）

問題 1.5（解答は p. 170）

次の式を計算してください。

（1）　$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\sqrt{24}$　　（2）　$(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$　　（3）　$\dfrac{2-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$

例題 1.6 [複素数]

次の複素数の計算をしてみましょう。

(1)　$(5+2i)(3-i)$　　(2)　$(4-3i)^2$

(3)　$\dfrac{3-2i}{3+2i}$　　(4)　$\dfrac{3}{1+i}+\dfrac{2}{1-i}$

i のきまり
- $i^2=-1$
- $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i\quad(a>0)$

解　i は**虚数単位**とよばれます。

(1)　まず展開公式を使って展開すると

与式$=5\cdot3+\{5\cdot(-1)+2\cdot3\}i+2i\cdot(-i)=15+i-2i^2$

$i^2=-1$ なので

$=15+i-2\cdot(-1)=15+i+2=17+i$

(2)　展開公式で展開して

与式$=4^2-2\cdot4\cdot3i+(3i)^2=16-24i+9i^2$

$=16-24i+9\cdot(-1)=16-24i-9=7-24i$

(3)　平方根の計算と同様に，分母，分子に $(3+2i)$ の**共役複素数** $(3-2i)$ をかけて計算すると

$$与式=\frac{(3-2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)}$$

展開公式で展開して

$$=\frac{3^2-2\cdot3\cdot2i+(2i)^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{9-12i+4\cdot i^2}{9-2^2\cdot i^2}$$

$$=\frac{9-12i+4\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}=\frac{9-12i-4}{9+4}=\frac{5-12i}{13}$$

(4)　通分して

$$与式=\frac{3(1-i)+2(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i+2+2i}{1^2-i^2}$$

$$=\frac{5-i}{1-(-1)}=\frac{5-i}{2}$$

(解終)

$a+bi$ に対して $a-bi$ を共役複素数といいます。

i の性質
- $i^2=-1$
- $i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i$
- $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

問題 1.6 (解答は p.171)

次の式を計算してください。

(1)　$(3-2i)(2+3i)$　　(2)　$\dfrac{5+2i}{5-2i}$　　(3)　$\dfrac{4}{2+i}-\dfrac{1}{2-i}$

例題 1.7［分数式の計算］

次の**分数式**の計算をしてみましょう。

（1）　$\dfrac{x-y}{x+y}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy}$　　（2）　$\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{1}{x-2}$

（3）　$\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x^2-1}$

警告！

$$\frac{3}{x+3}\neq\frac{3}{x}+\frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{x-2}\neq\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

⬆ 間違えやすい例をこのように「警告！」します。同じ間違えをしていないかよく注意してください。

解　分数式は**有理式**（ゆうりしき）ともよばれます。

（1）　因数分解ができるところはしておき，約分すると

$$\text{与式}=\frac{x-y}{x+y}\times\frac{(x+y)(x-y)}{x(x-y)}=\boxed{\frac{x-y}{x}}$$

（2）　通分して計算すると

$$\text{与式}=\frac{3(x-2)-(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{3x-6-x-3}{(x+3)(x-2)}$$

$$=\boxed{\frac{2x-9}{(x+3)(x-2)}}$$

（3）　分母を因数分解して通分すると

$$\text{与式}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x+1-x+2}{(x-2)(x-1)(x+1)}$$

$$=\boxed{\frac{3}{(x-2)(x-1)(x+1)}}$$

（解終）

共通分母を
　$(x-2)(x-1)^2(x+1)$
としてしまったら，あとで約分が必要よ。

問題 1.7 （解答は p. 171）

次の式を計算してください。

（1）　$\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x-6}\times\dfrac{x-6}{x-2}$　　（2）　$\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{1}{x+1}$　　（3）　$\dfrac{3x-1}{x(x+1)}-\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$

例題 1.8［部分分数展開］

次の有理式をみたす定数 a, b, c を求めて，有理式を**部分分数**に展開してみましょう。

（1）$\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+3}$

（2）$\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+1}$

「部分分数展開」は有理関数の積分やラプラス逆変換などに使われます。

解　右辺を通分し，分子が左辺と等しくなるように a, b, c を決めます。

（1）$$右辺=\frac{a(x+3)+b(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{ax+3a+bx-b}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{(a+b)x+(3a-b)}{(x-1)(x+3)}$$

この分子を左辺の分子と比較すると，

$$\left.\begin{aligned}a+b&=0\\3a-b&=4\end{aligned}\right\}\quad これを解くと\quad\left\{\begin{aligned}a&=1\\b&=-1\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\quad\frac{4}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+3}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}$$

通分するとき，分母に気をつけましょう。

（2）$$右辺=\frac{ax(x+1)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}$$

（1）とは異なった方法で求めてみましょう。左辺と右辺の分子を比較すると

$$1=ax(x+1)+b(x+1)+cx^2$$

ここで x に 3 つの適当な値を代入して，a, b, c の関係式を 3 つ求めます。

$$\left.\begin{array}{ll}x=0\ を代入 & 1=0+b+0\\ x=-1\ を代入 & 1=0+0+c\\ x=1\ を代入 & 1=2a+2b+c\end{array}\right\}\quad これを解くと\quad\left\{\begin{aligned}a&=-1\\b&=1\\c&=1\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

（解終）

問題 1.8 のヒント

(1)　分母を因数分解しましょう。

(2)　与式$=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

(3)　与式$=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

問題 1.8（解答は p. 171）

次の式を部分分数に展開してください。

（1）$\dfrac{6}{x^2+4x-5}$　　（2）$\dfrac{1}{x(x+1)^2}$　　（3）$\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

〈2〉 方 程 式

例題 1.9 [1 次方程式]

次の 1 次方程式を解いてみましょう。

（1） $5x-3=3x-5$　　（2） $0.2x-1=0.5$

（3） $\dfrac{7}{2}x-4=\dfrac{2}{3}$　　（4） $\sqrt{5}x=2-\sqrt{3}x$

解　方程式に含まれている x の最高次数は 1 なので，すべての方程式は 1 次方程式です。$ax+b=0\ (a\neq 0)$ の形に直して x を求めましょう。

（1） $5x-3x=3-5 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1$

（2） $0.2x=1+0.5 \rightarrow 0.2x=1.5$

方程式の係数が小数表示なので，解も小数で表示する方がよいでしょう。

両辺を 10 倍して

$$2x=15 \rightarrow x=\frac{15}{2} \rightarrow x=7.5$$

（3） $\dfrac{7}{2}x=4+\dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{7}{2}x=\dfrac{14}{3}$

$$x=\frac{14}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ x=\frac{4}{3}$$

（4） $\sqrt{5}x+\sqrt{3}x=2 \rightarrow (\sqrt{5}+\sqrt{3})x=2$

有理化しておきます。

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\therefore\ x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

（解終）

問題 1.9（解答は p. 172）

次の 1 次方程式を解いてください。

（1） $3.4x-0.7=0.3-0.6x$　　（2） $\dfrac{7}{6}x+\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3}x+2$　　（3） $\sqrt{6}x+3\sqrt{2}=2\sqrt{6}$