ベクトル解析入門

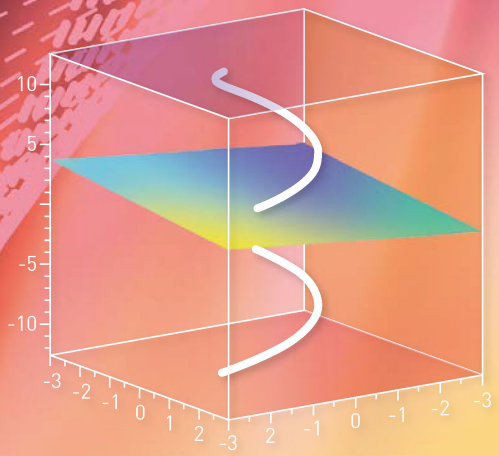
初歩からテンソルまで

壁谷喜継／川上竜樹 著

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_C (v_1\,dx + v_2\,dy)$$

$$\iint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdy = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

$$v_2\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdy.$$



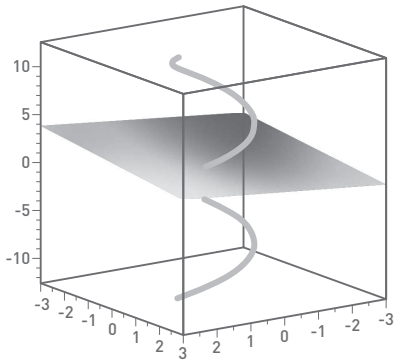
共立出版

ベクトル解析入門

初歩からテンソルまで

◆

壁谷喜継／川上竜樹 著



共立出版

はしがき

本書は，理工学系大学の学部 2 年次の学生を対象に，微積分と線形代数の知識を既知として，3 次元空間内の曲線と曲面の幾何学的性質，物理学を理解する上で必要なベクトル値関数の微積分，初歩的なテンソル計算とそれらの物理学への応用を習得することを目指して執筆した．

ベクトル解析に関する書物は非常に多くあるが，本書は力学・電磁気学の理解の礎となり，かつ 3 次元の曲面のもつ幾何的性質を解説し，微分幾何学の初歩も含めた書物になるよう書いたつもりである．そのために二部構成とし，工学に応用が広い内容を基本編とし，微分幾何学の入門的側面は発展編とした．学部 2 年次のベクトル解析の教育内容としては，基本編だけで十分であろう．以下，章立てについて述べていこう．

まず第 1 章では内積と外積の基本事項について説明を加えた．外積は大学で習う概念であるので，しっかり身につけてもらいたい．次に，ベクトル値関数の微分演算と曲線の性質，曲面の性質を第 2 章で解説する．第 3 章では，ベクトル解析において基本的な概念である場を導入し，勾配，発散，回転といった様々な微分について解説する．これらの概念は，次の章である第 4 章においてもよく現れる．この章では，ベクトル解析の中心的な話題であるガウスの定理などの積分定理について解説を行う．この内容の物理学への応用例を第 5 章で扱う．力学・電磁気学・流体力学において，どのようにガウスの定理，ストークスの定理が適用されているか確認できるようにした．物理学の法則は実験事実によるものであるので，導出は基本的にしないことにしている．この章では，「学而時習之不亦説乎」(一度勉強して，その後，適切な時期に復習するとよくわかるのは楽しいことではないか) の気持ちを味わっていただけたらと思う．以上が基本編の内容である．

次に発展編について述べる．発展編は，学部 2 年次としては少し高度な内容になっているので，学年が上がってから読み返すなど必要と興味に応じて読めばよい構成にしてある．半年の 1 コマの講義で，発展編まで進むことはまず不可能であろうと思われる．

第 6 章は微分幾何学の初歩というべき内容になるが，微分形式を導入して第 2 章の考え方を見通しよくするとともに，第 8 章のテンソルへの導入の意図もあって，ここで解説する．また第 7 章では，曲面上の曲線の長さについて，微分形式の立場からの見方であるリーマン計量について解説する．第 8 章では，前の 2 つの章の内容をもとにテンソルの概念を導入するが，テンソルについては初歩的な解説に留めた．この章の最後に，多少飛躍するが，リーマン計量とテンソル計算が典型的に用いられている例としてアインシュタインの重力場の方程式を紹介し，「シュヴァルツシルトの考え方」に従って解くことまでを解説した．

本書を編むに当たっては，大阪府立大学工学域および龍谷大学理工学部での「ベクトル解析」の講義ノートをもとにし，テンソル解析に当たる部分は，著者の 1 人が宮崎大学工学研究科で講義した内容をもとにしている．それを相当程度加筆して，著者同士の全面的な討論の後，ひとつの冊子としてまとめたものである．図については，TikZ と Maple 2017 を使用して描いた．

原稿全般を読んで問題点を指摘していただき，なおかつ有用な助言をいただいた大阪府立大学理学系研究科の入江幸右衛門氏と松永秀章氏には深く感謝申し上げたい．物理学者の立場から貴重な助言をくださった大阪府立大学大学院理学系研究科の会沢成彦氏にも深く感謝申し上げる．さらに，同僚である田畑稔氏，山口睦氏，城崎学氏，山岡直人氏，谷川智幸氏，菅徹氏，共同研究者でもある明治大学総合理工学部の二宮広和氏からも貴重なご意見をいただいた．併せて御礼を申し上げる．

遅々として進まない筆に寛容であった共立出版の潤賀浩明氏，髙橋萌子氏はじめ編集部の皆様にも感謝の意を表したい．

2019 年 2 月

壁谷喜継・川上竜樹

目　　次

はしがき　i

基本編：曲線と曲面の微積分　1

第 1 章　ベクトルの基礎と内積・外積　3

1.1　スカラーとベクトル　3
1.2　内積　6
1.3　外積　9

第 2 章　ベクトル値関数の微積分と曲線・曲面　19

2.1　ベクトル値関数の微積分　19
2.2　2 次元平面内の曲線　24
2.2.1　2 次元のフルネ・セレーの定理　32
2.2.2　4 頂点定理★　33
2.2.3　フェンヒェルの定理★　35
2.3　3 次元空間内の曲線　38
2.4　曲面の性質　46
2.4.1　様々な曲面の例　46
2.4.2　線素・面素　49
2.4.3　平均曲率・全曲率　56

第 3 章 スカラー場・ベクトル場と様々な微分 67

3.1 スカラー場とベクトル場 67
3.2 方向微分と勾配 70
3.3 発散・湧き出し 74
3.4 渦度・回転 77

第 4 章 関数の線積分・面積分 81

4.1 線積分 81
4.2 面積分 87
4.3 積分定理 89

第 5 章 物理学への応用 107

5.1 力学 107
5.2 電磁気学 109
5.2.1 静電場・ガウスの法則 109
5.2.2 磁場と定常電流 114
5.2.3 電流によりつくられる磁場 118
5.3 その他の物理の場面 120

発展編：微分幾何学に向けて 123

第 6 章 微分形式 125

6.1 ヤコビ行列式再考 126
6.2 外積再考 128
6.3 外微分 131
6.4 基本形式と外微分形式 135
6.5 微分形式と構造式 141
6.6 微分形式の積分 144

第 7 章　リーマン計量　147

7.1　2 次元曲面のリーマン計量 147
7.2　接空間 152
7.3　共変微分 157
7.4　測地線 161
7.5　2 点間の最短距離 166

第 8 章　テンソル　173

8.1　共変ベクトル，反変ベクトル 175
8.2　共変テンソル，混合テンソル，反変テンソル 177
8.2.1　2 階の共変テンソル 177
8.2.2　混合テンソル 179
8.2.3　反変テンソル 180
8.2.4　高階のテンソル 181
8.2.5　変数変換からの見方 183
8.3　クリストッフェルの記号の具体的表示★ 185
8.4　一般次元のリーマン計量★ 191
8.5　アインシュタインの重力場の方程式★ 193

問題略解　201

この本に出てくる人物　221

あとがき　224

参考文献　225

索　　引　227

★は発展事項であることを表す.

本書で用いる記号

$\mathbb{N}$	自然数全体のなす集合.
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	0 と自然数全体のなす集合.
$\mathbb{R}$	実数全体のなす集合. $(-\infty, \infty)$ とも表す.
$\mathbb{R}^n$	n 次元実ユークリッド空間.
$B_r(\boldsymbol{x}_0)$	点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球. i.e. $B_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \lvert\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\rvert < r\}$
$\mathbb{C}$	複素数全体のなす集合.

基本編

曲線と曲面の微積分

第1章 ベクトルの基礎と内積・外積

この章では，ベクトルの基礎事項の復習と内積・外積の説明を行う．ベクトルの基礎と内積については高校数学および線形代数で学習したと思われるが，外積については大学で習う概念であるので，ここでしっかりと基礎を固めてもらいたい．

1.1 スカラーとベクトル

質量，温度，長さなどのように1つの「大きさ」，つまり実数で表される量を**スカラー**といい，力，変位，速度などのように「大きさと向き」をもつ量を**ベクトル**という．ベクトルは矢印 (有向線分) によって表現することができる．このとき，矢の長さがベクトルの大きさ，矢の向きがベクトルの向きを表す．よって，ベクトルはその位置とは無関係に定義されるものであり，空間内の平行移動によって一致させることができるとき，それらのベクトルは同じである (等しい) と定める．

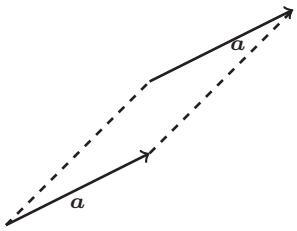


図 1.1

本書では，スカラーと区別するために，ベクトルは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のようにイタリックの太文字で表す．高校で用いてきたような $\vec{a}, \vec{b}$ のような表記はしない．ベクトルの大きさは絶対値記号を用いて $|\boldsymbol{a}|$ と書く．大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**といい，$\boldsymbol{e}$ で表す．特にベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルであることを強調したい場合は $\boldsymbol{e}_a$ と表す．また，大きさが零のベクトルを**ゼロ（零）ベクトル**といい，$\boldsymbol{0}$ で表す．ゼロベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，大きさが同じで向きが逆のものを**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ で表す．ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $k \in \mathbb{R}$ 倍する (**スカラー倍**するという) とは，$k > 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ の向きは同じで長さを k 倍することをいい，$k < 0$ のときは向きを逆にして長さを $|k|$ 倍したものをいい，$k\boldsymbol{a}$ で表す．また，$k = 0$ のときは $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となる．さらに 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{a}$ の終点に $\boldsymbol{b}$ の始点を一致させたとき，$\boldsymbol{a}$ の始点から $\boldsymbol{b}$ の終点に至るベクトルを定義できる．これを 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と定義する．

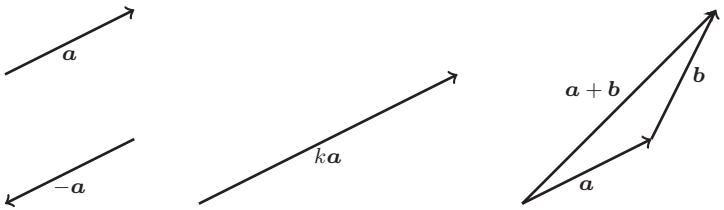


図 1.2

これらの定義の下で，次が成立する[1]．

公理 1.1　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して，

(1)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$　(加法の交換則)

(2)　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\ (= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$　(加法の結合則)

(3)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$　(零ベクトルの存在)

[1] 集合 V の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とスカラー倍 $k\boldsymbol{a}$ $(k \in \mathbb{R})$ がつねに V の中で定義され，公理 1.1 を満たすとき，V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間という．また，この公理 1.1 をベクトル空間の公理という．

(4)　任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a}'$ が存在する．
(逆ベクトルの存在)

(5)　$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$　(スカラー和の分配法則)

(6)　$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$　(ベクトル和の分配法則)

(7)　$(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})=\alpha\beta\boldsymbol{a}$　(スカラー倍の結合則)

(8)　$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$　(1 倍の定義)

が成り立つ．

本書では主に $n=2$ (平面) および $n=3$ (空間) の場合を扱う．$n=3$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{R}^3$ の元として，$a_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,3)$ を用いて

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\quad \text{または}\quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

と表すとき，これをベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分表示**という．また，このように成分表示されたベクトルを，**数ベクトル**ともよぶ．これに対して有向線分で表現されているものを**幾何ベクトル**ともよぶが，本書ではどちらも区別なく単にベクトルとよぶ．ベクトルの成分表示を用いて，これまでの内容を厳密に定義する．

定義 1.1

(i)　すべての成分が 0 であるベクトルをゼロベクトルといい，$\boldsymbol{0}$ と表す．

(ii)　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ が等しいとは，

$$a_i=b_i \qquad (i=1,2,3)$$

が成立することをいう．

(iii)　ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ に対して，

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

を $\boldsymbol{a}$ の大きさという．

また，和とスカラー倍をそれぞれ

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$$

と定めると，公理 1.1 を満たすことが容易に確認できる．

ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \qquad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$$

と定めると，これらはすべて単位ベクトルである．これらを 3 次元空間の基本ベクトル[2)]という．ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は基本ベクトルを用いることで

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

と表すことができる．また，基本ベクトルは一次独立である[3)]．

1.2　内積

摩擦のない水平面 (xy 平面) 上に質量 m の質点があるとしよう．この質点は，ばね定数 $k > 0$ のばねが取り付けられており，ばねの長さは自然な長さ，すなわち，力が働いていない状態であるとし，ばねの端点は固定されているとする．この質点を，xz 平面内の一定の方向へ，一定の力 $\boldsymbol{f}$ を作用させて引っ張る．$\boldsymbol{f}$ は，x 軸正方向とのなす角が θ である向きであるとする．質点は，xy 平面上に置いたまま，ばねの長さを自然長から長さ ℓ だけ伸ばす．

---

2) $\mathbb{R}^3$ の標準基底ともいう．

3) 一般に，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^3$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

となる実数 λ_i が $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ しか存在しないとき，$\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は一次独立であるという．また，一次独立でないとき，これらは一次従属であるという．線形代数の事実からすれば，3 次元空間においては 4 つ以上のベクトルは必ず一次従属になる．

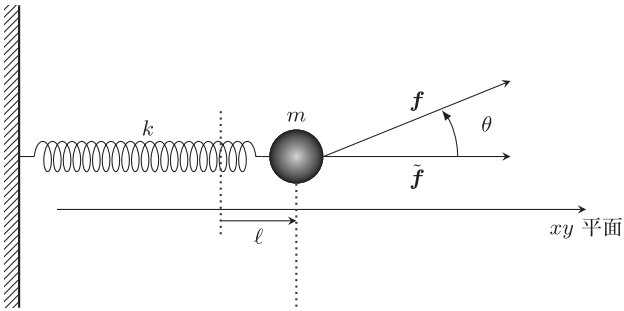


図 1.3

このとき，$\boldsymbol{f}$ がばねを伸ばすのに費やした仕事 W は，$\tilde{\boldsymbol{f}}$ を $\boldsymbol{f}$ の x 軸方向への分解とすると，

$$W = \ell|\tilde{\boldsymbol{f}}| = \ell|\boldsymbol{f}|\cos\theta \ \left(= \frac{1}{2}k\ell^2 \right)$$

が成り立つ (右辺は，ばねが蓄えたエネルギーである)．このとき，x 軸正方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ とすれば，$\boldsymbol{\ell} = \ell\boldsymbol{e}_x$ に対して，

$$W = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{\ell}|\cos\theta$$

と表せる．そこで次のような概念を定義しよう[4)]．

定義 1.2　ゼロでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

と定め，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** (**スカラー積**) という．ここで，$a = 0$ または $b = 0$ ならば，$a \cdot b = 0$ と定める．

また，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，

$$\tilde{\boldsymbol{b}} := \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

[4)] 内積を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ や $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と表すこともある．

をベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向への**正射影**という．図 1.3 の $\tilde{\boldsymbol{f}}$ は $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{\ell}$ 方向への正射影である．

3 次元のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がそれぞれ $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示されているとき，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ の成分表示は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \left(= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right) \tag{1.1}$$

で与えられる[5]．

これらから明らかなように以下が成立する．

性質 1.1　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して，

(1)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$　(交換則)

(2)　$k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$　(結合則)

(3)　$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$　(分配則)

が成立する．また

(4)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

(5)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直)

である．ゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ は任意のベクトルに対して垂直であると定める．

なお，基本ベクトルについては

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

が成立する[6]．これを基にして，性質 1.1 を用いると式 (1.1) を示すことがで

---

[5] 一般に $\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，その内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

で与えられる．

[6] この δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ**という．

きる．

問 1.1　性質 1.1 と基本ベクトルの内積の関係から式 (1.1) を確かめよ．

問 1.2　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ との内積がつねに $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ を満たしているとする．このとき，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ であることを示せ．

例題 1.1　ゼロでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ でつくられる平行四辺形の面積 S は

$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

で与えられることを示せ．

(解答)　ベクトル $\boldsymbol{b}$ の終点からベクトル $\boldsymbol{a}$ への垂線の長さを h とすると，

$$S=|\boldsymbol{a}|h$$

なので，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0\leq\theta\leq\pi)$ とすると，

$$\begin{aligned}S=|\boldsymbol{a}|h&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\\&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\end{aligned}$$

となる．　□

問 1.3　長さが 1 である 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ でつくられる平行四辺形の面積 S が最大となるのは，この平行四辺形が正方形のときであることを示せ．

1.3　外積

3 次元空間内に x 軸に太さの無視できる導線があり，x 軸正の方向に電流 I が流れているとする．また，y 軸正の方向には静磁場 $\boldsymbol{B}$ があるとする．このとき，z 軸正の方向に，導線の単位長さあたり $I|\boldsymbol{B}|$ の力がはたらくことが知られている．この考え方を踏まえて外積を定義する．

外積の定義に際して，次を導入する．

定義 1.3　3 次元の座標系 O–xyz が**右手系**であるとは，手のひらから右手の親指へ向かう方向を x 軸正方向，手のひらから右手の人差し指へ向かう方向を y 軸正方向としたとき，右手中指を手のひらに対して垂直に立てたときの，手のひらから中指に向かう方向を z 軸正方向とする直交座標系である．

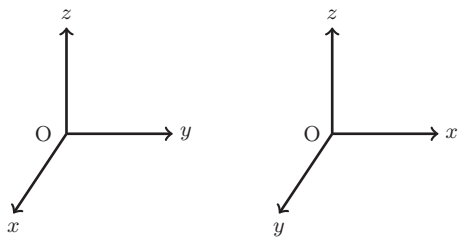


図 1.4　左が右手系の座標で，右が左手系の座標．

これに対して，**左手系**とは，右手の代わりに左手で同様な方法で方向を決めた直交座標系をいう．

3 次元空間には，右手系と左手系のちょうど 2 種類の直交座標系が定義できる．今後，特に断りがない限り，3 次元の直交座標系は右手系であるとする．なお，電磁気学においては，磁場中の電流にはたらく力との関係 (磁場と電流の向きと力の関係) は左手系であり，磁場中の電気回路の運動 (回路の位置の変化) による起電力の向きとの関係は右手系である[7]．

基本ベクトルを用いて説明すると，右ネジが $\boldsymbol{e}_1$ から $\boldsymbol{e}_2$ の方向に “反時計回り” の回転をするに従いネジの進行方向が $\boldsymbol{e}_3$ の向きに一致するとき，座標系は右手系であるといい，$\boldsymbol{e}_3$ の向きと逆のとき，座標系は左手系であるという．任意に与えた 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ についても，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がこの順序で右手系であるとは，右ネジが反時計回りに $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回転するとき，その進行方向が $\boldsymbol{c}$ に一致することである．

[7] これをフレミング (Fleming) の法則という．

以上の準備の下で，外積を次のように定義する．

定義 1.4　ゼロでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき，

(i)　$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$

(ii)　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$

(iii)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は (この順序で) 右手系

を満たすベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** (**ベクトル積**) といい，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と表す．

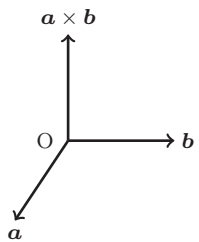


図 1.5

上記の定義と例題 1.1 より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は，これらのベクトルでつくられる平行四辺形の面積を大きさにもち，それぞれに垂直なベクトルであることがわかる．したがって，基本ベクトルについては

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

が成立する．この基本ベクトルに関する性質を用いることで，3 次元のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$$

と成分表示されているとき，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の成分表示が求められる．実際，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

となるから，行列式を用いれば

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1.2}$$

で与えられる．また，基本ベクトルを用いると，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

と形式的に与えられる．

これらから明らかなように以下が成立する．

性質 1.2　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して，

(1)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(2)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(3)　$k\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times k\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

(4)　$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

(5)　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

が成立する．また

(6)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行)

である．ゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ は任意のベクトルに対して平行であると定める．

問 1.4　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ との外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ がつねに成り立つならば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．

問 1.5　$\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 0)$ のとき，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．

外積は内積の場合と異なり分配則は成立するが，結合則は成立しない．すなわち，一般には

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$