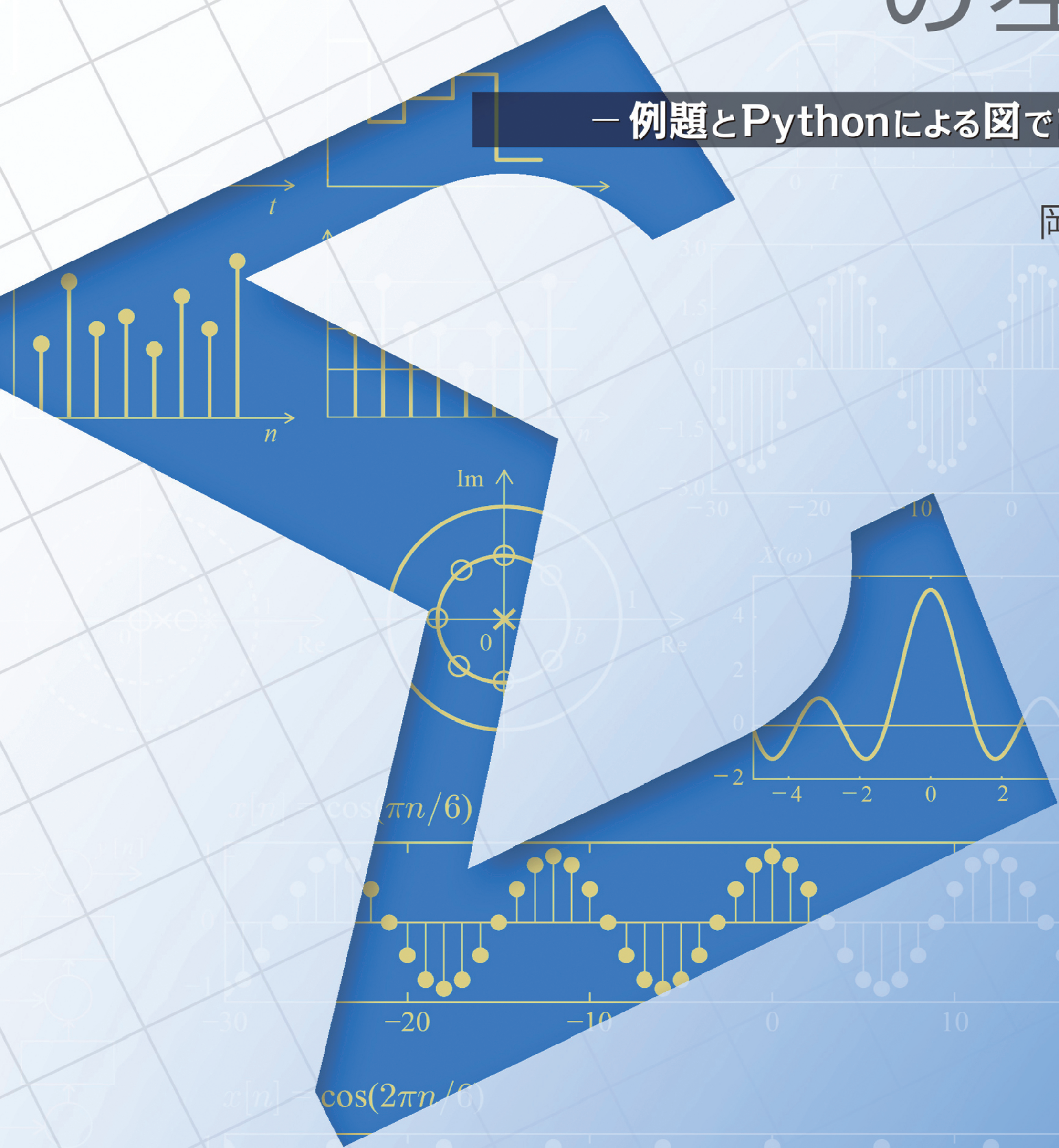
デジタル信号処理の基礎

―例題とPythonによる図で説く―

岡留　剛　著

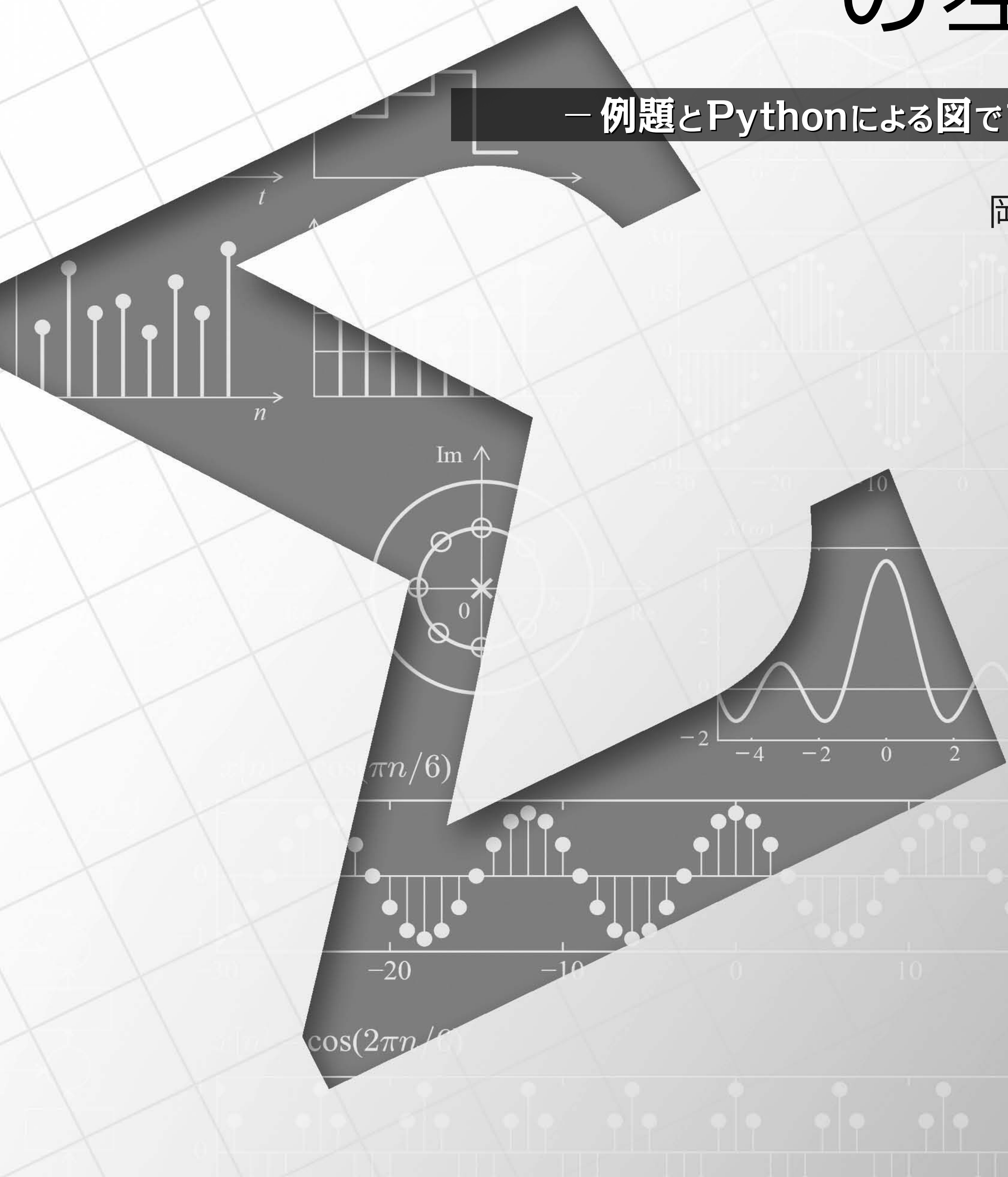


共立出版

デジタル信号処理の基礎

―例題とPythonによる図で説く―

岡留 剛 著



共立出版

はじめに

本書は，信号処理をはじめて学ぶ大学 2 年から 3 年の学生を対象としたデジタル信号処理の基礎についての入門的教科書である．目標を，デジタルフィルタの原理の理解と，その簡単な設計法と実現法の把握においた．デジタル信号処理に関しては，巻末の参考文献にあげたものはもちろん，それ以外にも多くのすぐれた教科書が出版されている．それらと比較すると本書の特色は以下の点にある．

- タイトルが示すように，豊富な図や例でことがらを説くことを心がけた．
- 演習問題の解答例も含めて，数式の変形はできるだけ途中をとばさずにていねいに記述した．
- とりわけ導出された数式の意味合いを強調した．
- 少数の例外をのぞいて，ほかの文献を参照せずに本書だけ読めばことたりるという意味で自己完結的であることをめざした．証明に関しても，数学的には厳密ではないものには，主張の妥当性が納得できると思われる記述をあたえた．ただし紙面の関係上，はぶかざるを得なかった項目がある．それらは GitHub (`https://github.com/tokadome/textbookDSP`) 上で公開する．
- デジタル信号処理の初歩の解説が主眼ではあるが，自己完結的であることをめざしたため，その理解に必要となる連続時間の信号やシステムに対しても必要最小限の記述をあたえた．とくに，離散時間信号と連続時間信号の議論の対応関係や差異をはっきりさせた．
- 図の多くは，Python でのプログラムによる出力である．それらのプログラムと，すべての図の pdf を GitHub (`https://github.com/tokadome/textbookDSP`) 上で公開する．

上記のように，式の変形をていねいに記述し，自己完結的であるので自習書としても本書を使っていただけると思う．しかし，記述がムダに長くかえって「木をみて森をみず」ということになってしまうことをおそれる．できれば，はじめに読むときは，証明のたぐいはすべて読みとばし，定義や主張・結果の意味を把握することにつとめ，2 度めに精読するという読み方をおすすめする．

本書の執筆に際しては，巻末に掲載した本を参考にさせていただいた．また，関西学院大学 理工学部 情報科学科/人間システム工学科 学科秘書の堀口恵子さんにはたいへんお世話になった．あわせてお礼を申しあげる．

2018 年 7 月　岡留　剛

目　次

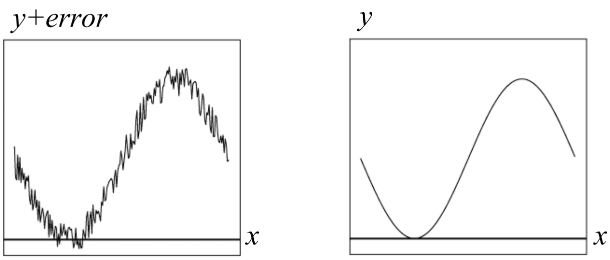
第1章

数学的準備

信号処理では，画像や音声・センサデータといった時間的に変化する物理量を信号といい，それをおもに数学的にあつかう．信号処理の技術は，たとえば，図 1.1(a) に示したような雑音がのった信号から雑音を除去して同図 (b) のような信号をとりだすことに使われる．また，信号処理は，情報変換や情報を圧縮することにも使われる．これらの例では，信号をほかの信号にかえる操作を行なっているとみなすことができる．信号を所望の信号に変換するシステムをフィルタという．代表的なフィルタを理解することと，その設計法を習得することが本書の目標である．その目標に向かって，基礎となるシステム一般論の初歩や，信号の性質を特徴づけるための数学，フーリエ変換や z 変換など，を学ぶ．現実の信号の多くは，時間とともにかわる実数として表わされる．しかし，数を表現する範囲を複素数にまで広げて考えることにより，あつかいが単純になり，みとおしよく計算が簡単になる．そこで本章では，複素数の復習からはじめて，複素数を項とする無限級数を簡単に述べる．また，複素数を平面上で表現する複素平面を導入し，さらに，三角関数と指数関数とを結びつける重要なオイラーの関係式を紹介する．

1.1 複素数

$x^2 = -1$ を満たす数は何か．それは，実数の集合 $\boldsymbol{R}$ の中には存在しない．新たな「数」を導入



(a) (b)

図 1.1 雑音除去

し，それを i で表わす[1]．その数は $i^2 = -1$ を満たす．この数を**虚数**あるいは**純虚数**という．さらに，$a+bi$（a，b は実数）という「数」を**複素数**という．複素数 $\alpha = a+bi$，a，b は実数，に対し，a を α の**実部**，b を α の**虚部**といい，それぞれ $\mathrm{Re}(\alpha)$，$\mathrm{Im}(\alpha)$ とかく．あるいは混乱がなければ $\mathrm{Re}\,\alpha$，$\mathrm{Im}\,\alpha$ とかく．以下では，複素数 α を $\alpha = a+bi$ とかいたとき，a，b は実数であることをことわらないことも多い．

例.　$3+4i$，$11+6i$，$2.5+3.5i$，$\mathrm{Re}(3+4i) = 3$，$\mathrm{Im}(3+4i) = 4$.

複素数のあつまり（集合）を $\boldsymbol{C}$ とかく．以下では，ちなみに，実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$，整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$，自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ とかく．

2つの複素数 α と β が等しいことを以下のように定義する．すなわち，$\alpha = a+bi$，$\beta = c+di \in \boldsymbol{C}$ のとき，

（a）$\alpha = \beta \Leftrightarrow a = c$ かつ $b = d$.

また複素数の四則演算を以下で定義する．すなわち，

（b）$\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$.　　（c）$\alpha - \beta = (a-c) + (b-d)i$.

（d）$\alpha \times \beta = (ac-bd) + (ad+bc)i$.　　（e）$\beta \neq 0$ ならば $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

ただし，$\alpha \times \beta$ を $\alpha \cdot \beta$ あるいは $\alpha\beta$ ともかく．

複素数を考えるとき，0 は $0+0i$ のことである．したがって $a+bi = 0$ なら $a = 0$，$b = 0$ である．定義から2つの複素数の**和**と**差**は，実部どうし，虚部どうしでおのおの実行すればよい．**積**に関しては，分配法則を実行して i^2 が出てきたら -1 とする．**商**については，$\alpha = a+bi$，$\beta = c+di\ (\neq 0) \in \boldsymbol{C}$ のとき分子と分母に分母 β の $c-di$ をかけると

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

となる．

例題 1.1.

つぎの方程式を満たす実数 x，y を求めよ．

（1）$2x + (y-3)i = 0$.　　（2）$(3x-y) + (2x+1)i = 7+5i$.

［解答例］

0 の定義と，左辺と右辺の複素数が等しい，ということの定義により，

（1）$2x = 0$，$y - 3 = 0$．よって $x = 0$，$y = 3$.

（2）$3x - y = 7$，$2x + 1 = 5$．よって $x = 2$，$y = -1$.

[1] 数学では純虚数を i と表記するが，工学では，i は電流を表わし，純虚数を j と表記することが多い．本章では，純虚数を i と表記し，第4章以降では j と表記する．

例題 1.2.

$\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 1 - 5i$ とする．つぎの計算を行なえ．

（1）$\alpha + \beta$.　（2）$\alpha - \beta$.　（3）$\alpha\beta$.　（4）α/β.

［解答例］

（1）$\alpha + \beta = (2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3i - 5i) = 3 - 2i$.

（2）$\alpha - \beta = (2 + 3i) - (1 - 5i) = (2 - 1) + (3i + 5i) = 1 + 8i$.

（3）$\alpha\beta = (2 + 3i) \cdot (1 - 5i) = 2 + 3i - 10i - 15i^2 = 2 + 3i - 10i + 15 = 17 - 7i$.

（4）$\alpha/\beta = (2 + 3i)/(1 - 5i) = (2 + 3i)(1 + 5i)/(1 - 5i)(1 + 5i)$

$$= (2 + 3i + 10i + 15i^2)/(1 - 25i^2) = (-13 + 13i)/26 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

複素数の四則演算では実数の演算とおなじ計算則が成り立つ．すなわち，α, β, $\gamma \in \boldsymbol{C}$ としたとき，

（a）結合則：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

（b）可換則：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

（c）分配則：$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

（d）単位元：$\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha 1 = \alpha$.

（e）逆元：$\alpha + (-\alpha) = 0$, $\alpha\dfrac{1}{\alpha} = 1\ (\alpha \neq 0)$.

が成り立つ．なお，乗法の可換則（b）より $2i = i2$ や $\pi i = i\pi$ など，任意の実数 a に対し $ai = ia$ が成り立つ．以下では ai も ia もどちらの表記も使用する．

つぎに複素数の絶対値と距離・共役複素数を定義しよう．$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di \in \boldsymbol{C}$ とする．このとき，$\sqrt{a^2 + b^2}$ を $\alpha = a + bi$ の**絶対値**といい $|\alpha|$ とかく．

例.　$|3 + 4i| = 5$, $|3| = 3$, $|0| = 0$.

絶対値を用いて，2 つの複素数 α と β の**距離**は $|\alpha - \beta|$ として定義される．実部と虚部で表わすと

$$|\alpha - \beta| = \Big|(a - c) + (b - d)i\Big| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

である．すなわち，2 つの複素数の距離は，実部どうしの距離 $|a - c|$ の 2 乗と，虚部どうしの距離 $|b - d|$ の 2 乗との和の正の平方根であり，その直観的な意味合いは次節で明らかになる．とくに，0 と α の距離は $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である．

例.　$\alpha = 2 + i$ と $\beta = 1 - i$ の距離は $|\alpha - \beta| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{5}$ である．

また，$\overline{\alpha} = a - bi$ を α の**共役複素数**という．定義により任意の実数 a の共役複素数は a である．逆に，$a = \overline{a}$ であれば a は実数である．

例.　$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$, $\overline{3} = 3$, $\overline{2i} = -2i$, $\overline{0} = 0$.

以下の定理としてまとめた関係はよく用いられる．証明はいずれも定義にもどれば簡単である．

定理 1.1

$\alpha = a + bi$，a，b は実数，とする．このとき以下が成り立つ．

（a）$\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha = |\alpha|^2 = a^2 + b^2$.

（b）$\mathrm{Re}(\alpha) = a = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}$.（$\alpha$ の実数部）　（c）$\mathrm{Im}(\alpha) = b = \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$.　（$\alpha$ の虚数部）

つぎの定理も基本事項として重要である．

定理 1.2

α と β を複素数とする．このとき以下が成り立つ．

（a）$\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.　（b）$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$.

（c）$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.　（d）$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

このうち，（a），（b），（c）は共役複素数の定義から明らかであり，（d）については，（a）より $|z|^2 = z\overline{z}$ であるから $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$.

z を複素数とし，a_i，$i = 0$，1，$\cdots$，n，を実数とすると，$\overline{a_i} = a_i$ と定理 1.2 より

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \cdots + a_n\overline{z}^n$$

が成り立つ．

例題 1.3.

つぎの複素数の共役複素数と絶対値を求めよ．

（1）$6 + 4i$.　（2）$2 - 7i$.　（3）$\sqrt{2}i$.　（4）-5.

［解答例］

（1）共役複素数　$6 - 4i$，絶対値　$\sqrt{52}$.

（2）共役複素数　$2 + 7i$，絶対値　$\sqrt{53}$.

（3）共役複素数　$-\sqrt{2}i$，絶対値　$\sqrt{2}$.

（4）共役複素数　-5，絶対値　5.

第3章以降では，複素数を項とする級数がたびたびあらわれ，本質的な役割りを演じる．そのためここで，複素数を項とする級数について簡単にまとめておこう．

まず，複素数の列 $\{z_n\} = z_1$，z_2，$\cdots$ の収束について説明しよう．複素数列 $\{z_n\}$ が複素数 w に**収束**するということは，

$$\lim_{n\to\infty} \left| z_n - w \right| = 0$$

として定義される．すなわち，n が大きくなるにしたがって，z_n と w の距離（絶対値）がいくらでも 0 に近づくことをいう．これは，$z_n - w$ の実部と虚部がそれぞれに $n \to \infty$ の極限で 0 に収束することを意味する．

つぎに，複素数を項とする無限級数を考えよう．無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

のその初項から第 n 項までの部分和

$$w_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

がつくる複素数列 $\{w_n\} = w_1, w_2, \cdots$ が収束するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**収束**するといい，$w = \displaystyle\lim_{n\to\infty} w_n$ をこの無限級数の和とよんで

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$$

とかく．このように，無限級数の和は，部分和である複素数列の収束先として定義されるので，さきに述べたことから，部分和 w_n の実部と虚部の収束先が，それぞれ w の実部と虚部の収束先である．たとえば，複素数列 z_1，z_2，$\cdots$ を

$$\begin{aligned} z_1 = 1 + i,\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,\ z_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}i, \\ z_4 = -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}i,\ \cdots,\ z_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}i,\ \cdots \end{aligned}$$

とすると，この複素数列の実部と虚部は，どちらも初項が 1 で公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列 1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2^2}$，$-\dfrac{1}{2^3}$，$\cdots$，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ である．初項が a で公比が r の等比数列の第 n 項までの和は $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ であるから，z_1 から z_n の和の実部と虚部はどちらも $\dfrac{2 - \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}}{3}$ となる．すなわち，

$$\begin{aligned} w_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) \cdot i \\ &= \left(\frac{2 - \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}}{3}\right) + \left(\frac{2 - \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}}{3}\right) \cdot i \end{aligned}$$

である．このとき，$w = \displaystyle\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ となり，部分和 w_n の実部と虚部ともに $\dfrac{2}{3}$ に収束する．

さて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対し，各項の絶対値をとった級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ を考える．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ も収束する．このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するという．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するとき，

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \tag{1.1}$$

となる．上の例だと，$\left|z_n\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

となり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．なお，$\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}i\right| = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ であり，$\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$ が確かめられる．

また，u を $|u| < 1$ なる複素数としたとき，上式（1.1）から

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} u^i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|u^i\right| \tag{1.2}$$

となる．定理 1.2（d）より

$$\left|u^i\right| = |\overbrace{u \cdot u \cdot \cdots \cdot u}^{i\,個}| = \overbrace{|u| \cdot |u| \cdot \cdots \cdot |u|}^{i\,個} = \left|u\right|^i$$

であり，また，$|u| < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |u|^n = 0$ であるから，式（1.2）の右辺は

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left|u^i\right| = \sum_{i=0}^{\infty}\left|u\right|^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - |u|^n}{1 - |u|} = \frac{1}{1 - |u|} < \infty$$

となる．よって，$|u| < 1$ のとき $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} u^i$ は絶対収束する．

級数のなかでも**べき級数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n は定数,$$

はとくに重要である．z のすべての値で収束するべき級数もあれば，$z = 0$ のほかでは発散するべき級数もある．あたえられたべき級数が収束する $|z|$ の上限を r とすれば，このべき級数は，原点を中心とする半径 r の円の内部の任意の点で収束し，円の外にある点では発散する．この円をべき級数の**収束円**といい，r を**収束半径**という．たとえば，$1 + z + z^2 + \cdots$ は，半径 1 の円の内部（$|z| < 1$）で収束し収束半径は 1 である．また，$1 - z^2 + z^4 - \cdots$ も半径 1 の円の内部で収束する．これらとは対照的に，$1 + z + \dfrac{1}{2!}z^2 + \dfrac{1}{3!}z^3 + \cdots$ はすべての z に対して収束するべき級数（収束半径 $r = \infty$）であり，$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \cdots$ は $z = 0$ だけで収束し，それ以外の z では発散する（収束半径 $r = 0$）．

なお，$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ という k が正負の両方向に無限の項をもつ級数が出てくる．これは，部分和

$$b_{m,\,n} = \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

の $m \to -\infty$，$n \to \infty$ の極限である．

1.2　複素平面

1.0, 2.0, 3.14, π, e, $\cdots$ などの**実数**の集合 $\boldsymbol{R}$ は単に「数」のあつまりである．一方，**直線**は「図形」である．本来は数とは無縁なものであるが，実数を直線上の点として表現したものを数直線といい，それは，直線上の各点に実数 1 つを対応させたものである（図 1.2）．実数 a の絶対値 $|a|$ は原点 0 からの距離である．

2 次元平面上の 1 点は，実数の組 (a, b) と対応づけられる（図 1.3）．2 次元平面全体は，実数の直積 $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ と表現される．直積 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ は，$\boldsymbol{R}$ の要素（実数）を 2 つとって，2 組にし，その組をすべてあつめた集合である．すなわち，$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \boldsymbol{R}\}$ である．

1 つの複素数 $a + bi$，a，b は実数，は 2 つの変数の組 (a, b) により完全にきまる．また組 (a, b) は 2 次元平面上の 1 点と対応づけられるので，結局，複素数は 2 次元平面上の 1 点と対応づけられる．各点が，1 つの複素数 $a + bi$ を表現しているとみなした平面のことを**複素平面**という（図 1.4）．複素数の絶対値 $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ は原点 $(0, 0)$ から (a, b) までの距離のことである．また，2 つの複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$，a，b，c，d は実数，の距離 $|\alpha - \beta|$ は複素平面上の 2 点 (a, b) と (c, d) の直線距離である．

複素平面に，∞ で表わされる**無限遠点**をつけくわえると便利なことがある．無限遠点をつけくわえた複素平面を**拡張された複素平面**という．直感的には，無限遠点は，z を複素数としたとき，$|z| \to \infty$ となるように z を動かしたときの極限である．ただし重要なことは，無限遠点 ∞ はただ 1 つの点であり，複素平面のどちらの方向に z を動かしても，その 1 つの無限遠点 ∞ に近づくとみなすことである．

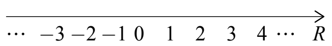


図 1.2　数直線

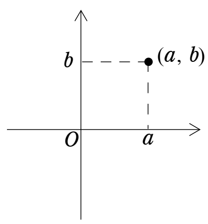


図 1.3　2 次元平面と実数の組

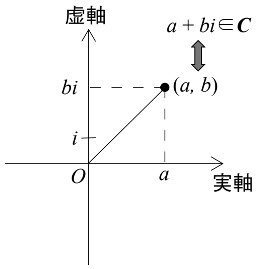


図 1.4　複素平面

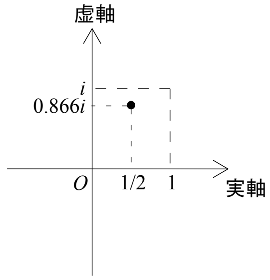


図 1.5　例題 1.4 の解答例

例題 1.4.

$\alpha = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を複素平面上にしるせ.

［解答例］

図 1.5 参照.

演習 1.1.

$\alpha = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする．このとき，

（1）α の絶対値を求めよ．　（2）α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ を求めよ．

（3）α とその共役複素数との積 $\alpha\overline{\alpha}$ を求めよ．　（4）$\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}$ を求めよ．

1.3　指数関数と三角関数

つぎに自然対数の底 e を定義しよう．

$\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = 2.370370370$，$\cdots$ のように $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の $n \to \infty$ のときの極限が e である．すなわち，

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \cdots \to 2.71828183\cdots = e$$

である．極限記号を使ってかくと，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ となる．

続いて指数法則についてまとめる．$a, b \in \boldsymbol{R}$，すなわち a，b は実数とする．このとき，

（a）$e^0 = 1$，　（b）$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$，　（c）$e^a e^b = e^{a+b}$，　（d）$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

が成り立つ．

また，A と a を 0 でない実定数（実数の定数）とし，2 つの実数上の変数 x と y があるとする．このとき，$y = Ae^{ax}$ を x の**指数関数**という（図 1.6）．

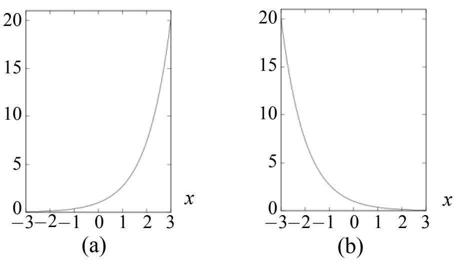


図 1.6　指数関数

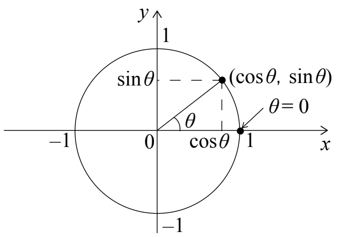


図 **1.7**　単位円上の点の座標

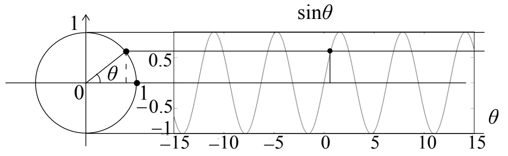


図 **1.8**　単位円と三角関数

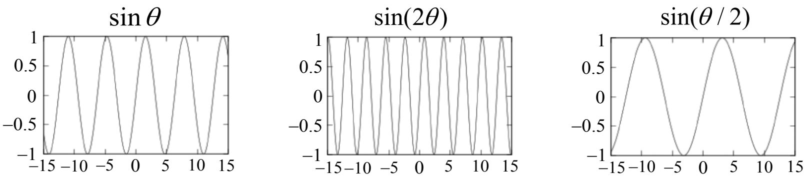


図 **1.9**　三角関数の振動のこまかさのちがい

例題 1.5.

（1）e^2e^2 を簡単にせよ．　　（2）e^3/e^4 を簡単にせよ．

［解答例］

（1）$e^2e^2 = e^{2+2} = e^4$.　　（2）$e^3/e^4 = e^{3-4} = e^{-1}$.

演習 1.2.

（1）e^3e^2 を簡単にせよ．　　（2）e^3/e^2 を簡単にせよ．

さて，原点を中心とし半径 1 の円，すなわち単位円上の任意の点について，原点からその点までの線分と，x 軸とのなす角を θ とする．このとき，その点の x 座標が $\cos\theta$，y 座標が $\sin\theta$ である（図 1.7）．$A\cos(\omega\theta+b)$ や $A\sin(\omega\theta+b)$，A，ω，b は実定数，などを θ の関数としてみた場合それらを**三角関数**という（図 1.8）．定数 ω の大きさによって三角関数の「振動のこまかさ」がかわってくる．たとえば sin であれば，$\omega = 1$ のときにくらべ，$\omega = 2$ の $\sin(2\theta)$ は倍のこまかさの振動で，逆に $\omega = 1/2$ の $\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ は半分のこまかさの振動である（図 1.9）．さきほど導入した複素平面で考えると，単位円上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ は，複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ に対応していることがわかる（図 1.10）．

例題 1.6.

（1）$\cos(\pi/4)$，$\sin(\pi/4)$ を求めよ．

（2）平面上の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を，その平面を複素平面とみなして複素数で表わせ．さらに，その複素数を cos と sin を用いて表現せよ．

［解答例］

（1）$1/\sqrt{2}$，$1/\sqrt{2}$.　　（2）複素数 $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$，これは，$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ とかける．

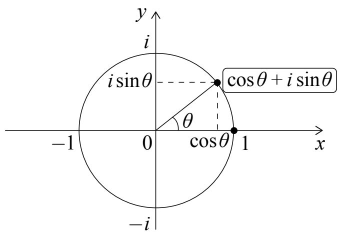


図 1.10　複素平面上の単位円と $\cos\theta + i\sin\theta$

演習 1.3.

（1）$\cos(\pi/3)$，$\sin(\pi/3)$ を求めよ．

（2）平面上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を，その平面を複素平面とみなして複素数で表わせ．

1.4　オイラーの公式

さて，有名なオイラーの公式を導こう．

まず x を実変数として，$\sin x$ と $\cos x$，それと e^x のマクローリン級数展開をかきくだそう．関数 $f(x)$ のマクローリン級数展開は，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad f^{(n)} \text{は} f \text{の} n \text{階微分},$$

であるから，

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

となる．$\cos x + i\sin x$ を，上のマクローリン級数展開を使って x のべき級数として表現すると，$i^2 = -1$，$i^3 = -i$，$i^4 = 1$，$i^5 = i$，$i^6 = -1$，$\cdots$ を考慮して，

$$\begin{aligned}
\cos x + i\sin x &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \cdots\right) + \left(ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}
\end{aligned}$$

となる．

すなわち，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$