論理・集合・数学語

石川剛郎 著

3

数・学・探・検

共立講座

新井仁之／小林俊行／斎藤　毅／吉田朋広 編

共立出版

論理・集合・数学語

石川剛郎　著

新井仁之／小林俊行／斎藤　毅／吉田朋広　編

3

数・学・探・検

共立講座

共立出版

刊行にあたって

数学の歴史は人類の知性の歴史とともにはじまり，その蓄積には膨大なものがあります．その一方で，数学は現在もとどまることなく発展し続け，その適用範囲を広げながら，内容を深化させています．「数学探検」，「数学の魅力」，「数学の輝き」の 3 部からなる本講座で，興味や準備に応じて，数学の現時点での諸相をぜひじっくりと味わってください．

数学には果てしない広がりがあり，一つ一つのテーマも奥深いものです．本講座では，多彩な話題をカバーし，それでいて体系的にもしっかりとしたものを，豪華な執筆陣に書いていただきます．十分な時間をかけてそれをゆったりと満喫し，現在の数学の姿，世界をお楽しみください．

「数学探検」

数学の入り口を，興味に応じて自由に探検できる出会いの場です．定番の教科書で基礎知識を順に学習するのだけが数学の学び方ではありません．予備知識がそれほどなくても十分に楽しめる多彩なテーマが数学にはあります．

数学に興味はあっても基礎知識を積み上げていくのは重荷に感じられるでしょうか？　そんな方にも数学の世界を発見できるよう，大学での数学の従来のカリキュラムにはとらわれず，予備知識が少なくても到達できる数学のおもしろいテーマを沢山とりあげました．そのような話題には実に多様なものがあります．時間に制約されず，興味をもったトピックを，ときには寄り道もしながら，数学を自由に探検してください．数学以外の分野での活躍をめざす人に役立ちそうな話題も意識してとりあげました．

本格的に数学を勉強したい方には，基礎知識をしっかりと学ぶための本も用意しました．本格的な数学特有の考え方，ことばの使い方にもなじめるように高校数学から大学数学への橋渡しを重視してあります．興味と目的に応じて，数学の世界を探検してください．

編集委員

はじめに

この本は，数学の基礎スキル強化本である．

数学の本を読むとき，著者の言いたいことがわかりたい．数学の講義・講演を聴いてよく理解したい．数学のレポートや論文をうまく書きたい．どう説明を組み立てたらよいか知りたい．そういうときには，必要なスキルというものが存在する．本書は，そのスキルを身につけるための本である．

探検に必要なのは，好奇心と観察力，観察する道具，装備，食料，靴，帽子，リュック，磁石，地図，地理的な知識，段取り，計画，サバイバル道具，... などであろう．それらに該当する道具が,「数学の探検」でも必要になる．そこで,「数学を探検する」という行為を行うためのスキルに注目した．「数学語」に慣れ親しむように，そしてそのための基礎となる「論理」と「集合」について納得できるように，丁寧に説明する．

これから数学の勉強を本格的に始めようという方・すでに始めている方，昔，数学の勉強をしたが，もう一度改めて勉強をやり直したいという方，を対象として，数学の基本的な知識とスキルについて書いた．数学のより進んだスキル，たとえば英語表現についても触れた．また，数学の専門家の方にも，指導の資料・ハンドブック，備忘録として本書を活用していただければ幸いである．

本書では，説明する項目と関連する項目を☞ で明示したので，どこからでも読むことができる．例題，演習問題をなるべく多く載せて，さらに解答例を可能な限り丁寧につけている．自主トレーニングも必要なので，例題・演習問題を活用してほしい．なお，この本で扱う数学の素材は，主に，数学の分野によらずに必要となる初等的な整数論，線形代数学，微分積分学，および，有名な

定理や予想などから取った.

本書を利用することで，数学ができるようになる，ということは保証しない. しかし，数学がわかるようになる. 正確に言うと,「わかり方がわかるようになる」，その手助けをしたい.

この本を読んだ，ならば，数学のわかり方がわかる

本書を皆さんの数学の探検のお供にしてほしい. ぜひ有意義で楽しい数学探検の旅を！

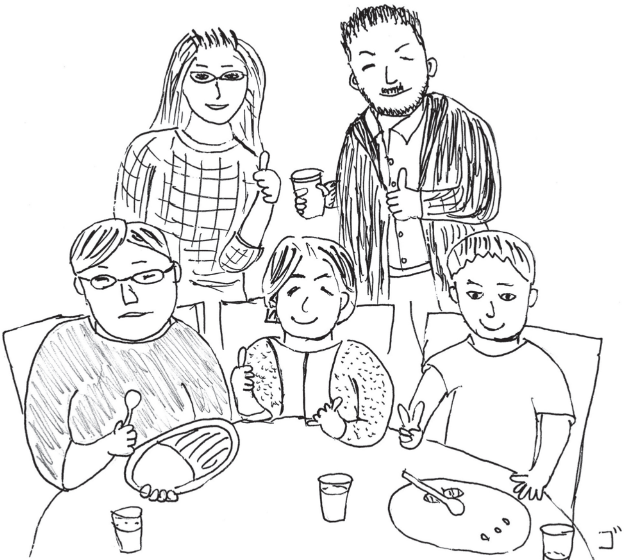
石川剛郎

キャラクター紹介

この本の中で活躍する 5 人組を紹介したい.

R 君　：何事も肯定的に考える．素直な性格.
O さん：やさしい性格で協調性に富む．社交的．歌が上手.
N 君　：何事も否定的に考える．無類のカレー好き.
R 博士：冷静で論理的だが，たまに感情的になることもある．博識.
I 先生　：直観で生きている先生．それなりに見識はあるが，少し頼りない.

R 君，O さん，N 君は同級生．R 博士を通して，I 先生と知り合った.



目　　次

記号表

$\forall$ ：任意の，すべての.

$\exists$ ：存在して，存在する.

F ：偽.

I ：恒真命題．単位行列.

T ：真.

O ：恒偽命題．零行列.

$:=$ ：左辺を右辺によって定める（数式).

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ：左辺を右辺によって定義する（命題).

$\wedge$ ：かつ（論理).

$\vee$ ：または（論理).

$\cap$ ：共通部分（集合).

$\cup$ ：和（集合).

$\neg P$ ：命題 P の否定命題.

$\overline{P}$ ：命題 P の否定命題.

$\leq$ ：左辺は右辺以下．$\leqq$ と同じ意味（数式).

$\geq$ ：左辺は右辺以上．$\geqq$ と同じ意味（数式).

$\in$ ：左辺は右辺に属する，左辺は右辺の要素である（集合).

$\ni$ ：右辺は左辺に属する，右辺は左辺の要素である（集合).

$\setminus$ ：差集合，前者に属し後者に属さないものたち（集合).

$\subseteq$ ：左辺は右辺に含まれる（等号の可能性もある)．同じ意味で $\subset$ という記号が使われる場合も多い（集合).

$\supseteq$ ：左辺は右辺を含む（等号の可能性もある)．同じ意味で $\supset$ という記号が使われる場合も多い（集合).

論理・集合・写像の公式集

論理

$(P \land Q) \iff (Q \land P)$	（定理 2.18）
$P \land P \iff P$	（例題 2.19）
$(P \land Q) \land R \iff P \land (Q \land R)$	（例題 2.19）
$(R \Rightarrow (Q \Rightarrow P)) \iff ((R \land Q) \Rightarrow P)$	（例題 2.21）
$(P \Leftrightarrow Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow P))$	（定理 2.23）
$(P \lor Q) \iff (Q \lor P)$	（定理 2.27）
$P \lor P \iff P$	（例題 2.29）
$(P \lor Q) \lor R \iff P \lor (Q \lor R)$	（例題 2.29）
$(P \lor Q) \land R \iff (P \land R) \lor (Q \land R)$	（定理 2.31）
$(P \land Q) \lor R \iff (P \lor R) \land (Q \lor R)$	（定理 2.31）
$(P \land Q) \lor P \iff P, \quad (P \lor Q) \land P \iff P$	（定理 2.32）
$P \land \overline{P}$ は偽，$P \lor \overline{P}$ は真	（定理 2.37）
$\overline{P \land Q} \iff (\overline{P} \lor \overline{Q})$	（定理 2.40）
$\overline{P \lor Q} \iff (\overline{P} \land \overline{Q})$	（定理 2.40）
$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \lor Q)$	（定理 2.43）
$\overline{P \Rightarrow Q} \iff P \land \overline{Q}$	（系 2.44）
$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$	（定理 2.51）
$((P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$	（定理 2.54）
$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \land (P \Rightarrow Q)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$	（例題 2.55）
$(\forall x(Q(x)), P(x)) \iff (\forall x, (Q(x) \Rightarrow P(x)))$	（定理 2.63）

$(\forall x(R(x)), (Q(x) \Rightarrow P(x))) \Longleftrightarrow (\forall x, ((R(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(x)))$ （例題 2.65）

$(\exists x(Q(x)), P(x)) \Longleftrightarrow (\exists x, (Q(x) \wedge P(x)))$ （定理 2.68）

$\overline{\forall x, P(x)} \Longleftrightarrow (\exists x, \overline{P(x)})$ （定理 2.81）

$\overline{\exists x, Q(x)} \Longleftrightarrow (\forall x, \overline{Q(x)})$ （定理 2.81）

$\overline{\forall x(Q(x)), P(x)} \Longleftrightarrow (\exists x(Q(x)), \overline{P(x)})$ （定理 2.82）

$\overline{\exists x(Q(x)), R(x)} \Longleftrightarrow (\forall x(Q(x)), \overline{R(x)})$ （定理 2.82）

$(\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)) \Longleftrightarrow \forall x, P(x) \wedge Q(x)$ （定理 2.87）

$(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x)) \Longrightarrow \forall x, P(x) \vee Q(x)$ （定理 2.87）

$\exists x, P(x) \vee Q(x) \Longleftrightarrow (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$ （系 2.88）

$\exists x, P(x) \wedge Q(x) \Longrightarrow (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$ （系 2.88）

集合

$(S = T) \Longleftrightarrow (S \subseteq T$ かつ $T \subseteq S)$ （定理 3.14）

$x \in \emptyset$ は偽，$\emptyset \subseteq S$ は真 （定理 3.18）

$S \cap T = T \cap S,\ S \cap S = S,\ (S \cap T) \cap W = S \cap (T \cap W)$ （注意 3.26）

$S \cup T = T \cup S,\ S \cup S = S,\ (S \cup T) \cup W = S \cup (T \cup W)$ （注意 3.26）

$(S \cap T) \cup S = S, \quad (S \cup T) \cap S = S$ （例題 3.27）

$(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$ （例題 3.48）

$(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$ （演習問題 3.49）

$\{x \in \Omega \mid (x \in S) \Rightarrow (x \in T)\} \ = \ (S \setminus T)^c$ （定理 3.50）

$\left(\bigcup_{a \in A} S_a\right)^c = \bigcap_{a \in A} S_a^c$ （例題 3.51）

$\left(\bigcap_{a \in A} S_a\right)^c = \bigcup_{a \in A} S_a^c$ （演習問題 3.52）

関数と写像

$S_1 \subseteq S_2$ ならば $f(S_1) \subseteq f(S_2)$ （例題 4.20）

$f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$ （演習問題 4.21）

$f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$ （例題 4.24）

$S \subseteq f^{-1}(f(S))$ （例題 4.49）

$f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2) = f^{-1}(T_1 \cap T_2)$ （例題 4.50）

$f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$ （演習問題 4.51）

$f^{-1}(\bigcap_{a \in A} T_a) = \bigcap_{a \in A} f^{-1}(T_a)$ （演習問題 4.52）

$f^{-1}(\bigcup_{a \in A} T_a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(T_a)$ （演習問題 4.52）

第１章

数学語

・・・はじめに数学語ありき．

何でもよい，皆さんが持っている数学の本を広げてみてほしい．いろいろな事項が言葉を尽くして説明してある．少し目を遠ざけて眺めてみる．専門用語の他に，

～のとき，～について，～を示せ，よって～，～が成り立つ，～ならば～，
～に矛盾する，ある～について，任意の～について，
たかだか～，少なくとも～，...

などの常套句が多く目につくだろう．これらの言葉は日常使う言葉とは少しだけ異なる意味をもつ．これらの言葉は数学の説明のために使われている特別な言葉である．数学特有の明確な意味をもっていて，常に厳格に注意深く使われている．これらの言葉を「数学語」とよぶことにしたい．数学の講義でも，数学の試験問題にも数学語は使われる．万一，数学語を誤解して読み書きしていると，教科書が理解できない，数学の問題が解けない，数学が上手に表現できない，ということになりかねない．

このような，数学の本や講義・講演で常用され，理解しておかなければいけない「数学語」の意味を説明する．また，関連して，英語における数学語，「数学英語」にも少し触れる．

1.1　成り立つ

「成り立つ」ということは，ある陳述（命題）が，正しい（真である）ことである．「成り立つ」という表現の他に，「成立する」とか，「正しい」とか，「真（しん）である」などと表現する．英語の hold（自動詞）は，成り立つ，という意味である．

◈**例 1.1**　任意の実数 x について，不等式 $x^2 \geq 0$ が成り立つ．For any real number x, the inequality $x^2 \geq 0$ holds[1].

ある陳述（命題）が成り立つ，とは，それが正しい，ということであるから，上の例の場合，$x^2 \geq 0$ という命題が正しいということである．どんな実数 x についても，2 乗すれば x^2 は 0 以上になる．「正しい」は「真である」と言い換えられる．

✔**注意 1.2**　例 1.1 と同じ主張を，たとえば，「実数 x について，$x^2 \geq 0$」とか，「$x^2 \geq 0$ $(\forall x \in \mathbf{R})$」「$x^2 \geq 0$ $(x \in \mathbf{R})$」などと省略して書く場合もある[2]．読むときは，言葉を補って，例 1.1 のように読み換えるとわかりやすい．

命題が成り立たない場合，すなわち，命題が正しくないとき，命題が偽（ぎ）である，という．

☞ 命題，真，偽（2.1 節）．任意の（1.19 節）．

1.2　示す

「示す」とは，証明する，という意味をもつ[3]．

◈**例 1.3**　任意の実数 x について，等式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を示せ．For any real

---

[1] 3 人称単数なので hold は holds になる．

[2] $\in$ は属する，という記号である．集合の記号の一般論については，第 3 章を参照せよ．

[3] 英語では，show あるいは prove と表現する．

number x, show the equality $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

◆例 1.4

リーマン仮説を示せ.

とは，リーマン仮説[4]が正しいことを証明せよ，という意味である.

「示す」ということは，成り立つことを示す，という意味であるが，それが実際問題としてどの程度の意味合いをもつかは，文脈・状況に依存する．試験問題であれば，前提として仮定してよい事項，つまり用いてよい事項が通常はっきりしている．例 1.3 では，微分積分の教科書にあるような証明の概要を再現することが期待されているだろう．一方，例 1.4 では，完全な証明が要求される.

類似の用語に，「確かめる」（成り立つことを確かめるの意味）がある．英語では，verify．数学的に意味の相違はない.

◆例 1.5　任意の実数 x について，等式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を確かめよ．For any real number x, verify the equality $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
☞ 証明（1.26 節）.

1.3　〜について，〜に対して，〜に関して

主張，陳述や命題で扱う対象を限定・明示するときに使う言葉である．〜について，〜に対して，〜に関して，に数学的な意味の違いはない．英語では for 〜 ということが多い.

◆例 1.6　条件 $0 < x < 1$ を満たす任意の実数 x に対して，不等式 $x^2 < x$ が成り立つ．For any real number x satisfying $0 < x < 1$, the inequality $x^2 < x$ holds.

[4](Riemann's hypothesis) ゼータ関数の自明でない零点の実部は $\frac{1}{2}$ である，という仮説（予想）であるが，2015 年現在，未解決である.

1.4　満たす

対象 X に対して，X に関するある条件 $P(X)$ が成り立っているとき，X は $P(X)$ を満たす，という．X satisfies $P(X)$.

ここで，$P(X)$ と書いたのは，$P(X)$ の真偽が X に依存していることを明示するためである．$P(X)$ を単に P と書く場合もある．

◆**例 1.7**　任意の実数 x は $x^2 \geq 0$ を満たす．Any real number x satisfies $x^2 \geq 0$. この場合，対象 X は実数 x のことであり，$P(X)$ は $x^2 \geq 0$ という不等式で表される命題である．

◆**例 1.8**　条件 $1 \leq k \leq n$ を満たす任意の自然数 k に対して... For any natural number k which satisfies the condition $1 \leq k \leq n, \ldots$

☞ 条件（1.9 節，あるいは 注意 1.15）．〜に対して（1.3 節）．

1.5　ならば

ならば，という用語は，数学で非常に多用される言葉である：

$$P \text{ ならば } Q.$$

もし P が成り立つならば，Q が成り立つ，という主張である[5].

「〜なら〜」「〜のとき〜」「〜の場合〜」という表現も，「〜ならば〜」と同じ意味で使われる．

P を**前提** (assumption)，Q を**結論** (consequence) という．また，「P ならば Q」が成り立つ場合，P は Q であるための**十分条件** (sufficient condition) とよび，Q は P であるための**必要条件** (necessary condition) とよぶ．

P が成り立っていれば Q が成り立つので，Q が成り立つためには P **が成り立てば十分だ**．だから，P を十分条件とよぶ．また，もし P が成り立っていれば必ず Q が成り立つはずなので，P が成り立つには Q **が成り立つのが必要だ**．だから，Q を必要条件とよぶ．

[5] 英語では，If P, then Q. あるいは，Q if P. という表現になる．

数学では，形式論理の「ならば」を使う．日常使う「ならば」とはニュアンスが異なる場合もあるので注意したい．

◈**例 1.9**　次の主張を考えよう：

X が条件 $P(X)$ を満たすならば，Y は条件 $Q(Y)$ を満たす．

X が条件 $P(X)$ を満たすか，X が条件 $P(X)$ を満たさないか，のどちらかであるが，満たさない場合は問題なし，として，満たす場合には，必ず，Y は条件 $Q(Y)$ を満たす，ということをこの主張は意味している．

大切なところなので繰り返そう．

前提 P が正しくない場合は，結論 Q が正しくても正しくなくても，「P ならば Q」という命題自体は正しい．

「P ならば Q」は，P でなければ Q でない，というような“おせっかいな”あるいは“親切な”主張は全然していないのである[6]．

演習問題 1.10　次の命題（主張）の前提と結論は何か．

(1) この本を読んだ，ならば，数学のわかり方がわかる．
(2) この本を最後まで読まなかった，ならば，後悔する．
(3) 数学をよく勉強した，ならば，充実した人生を送ることができる．

☞ 成り立つ（1.1 節）．かつ（2.5 節）．満たす（1.4 節）．

✔**注意 1.11**　「x が条件 $P(x)$ を満たすならば $Q(x)$ が成り立つ」という型の命題は，次章で説明する論理記号を用いて，$\forall x(P(x)), Q(x)$ と表される．ここで $(P(x))$ の部分は，x に関する条件を表している．同じ意味の命題を，$\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ と表すこともできる．

☞ 任意とならば（定理 2.63）．

[6] 極めてクールな世界なのである．（R 博士）

1.6　従う，導かれる

次の英文を訳してみよう：

$$Q \text{ follows from } P.$$

「Q が P から従う」「Q が P から導かれる」という訳をつける．P が Q を導く，という意味である．つまり，P ならば Q が成り立つ，ということである．

次の英文はどうだろう：

$$P \text{ implies } Q.$$

「P は Q を導く」と訳す．あるいは，やはり，「P ならば Q」と訳すこともできる．

☞ ならば（1.5 節）．

1.7　〜とおく，〜と定める

「〜とおく」「〜と定める」は，数式・記号などの定義で使用する言葉である．英語では，put, set, let などを使う．

◆**例 1.12**　任意の自然数 n に対して，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$ とおく．For any natural number n, we put $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$.

1.8　〜とする

「〜とする」という表現の意味は場合によって意味が異なる．「〜とする」を，何かを仮定する，という意味で使う場合と，「〜とする」を，何かを対象として扱う，という意味で使う場合と，「〜とする」を，前節で説明した，〜とおく，〜と定める，という意味で使う場合がある．

◆**例 1.13**　(1) P が成り立つとする（仮定）．Let P hold. = Assume that P holds. 命題 P が成り立つと仮定する，という意味．
(2) S を集合とする（対象）．Let S be a set. = Take a set S. 何でもよいから，任意に集合をもってきて，説明・議論する，というニュアンスである．

(3) π を円周率とする（記号）．Let π denote the ratio of the circumference of a circle to its diameter. π で円周率を表しますよ，という意味.

ちなみに，Let ～ は命令形だとすると，「～とせよ」と訳すことができる．We let ～ の省略形だと思うと，「～としよう」と訳すことができる.

1.9　～のための条件

「条件」という用語も，数学で多用される.

◆**例 1.14**　次の問は「～のための条件」という数学語の使用例である：

> **問.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ が正則行列になるためのスカラー a の条件を求めよ.

十分条件と必要条件という用語がある.

- 「P ならば Q」が成り立てば，Q は P の必要条件であるという.
- 「R ならば P」が成り立てば，R は P の十分条件であるという.
- 「P ならば S」が成り立ち，「S ならば P」が成り立てば，S は P の必要十分条件であるという.

いま，正方行列 A に関する命題 $P = P(A)$ を，

$$P: A \text{ が正則行列である.}$$

と定める．命題 $Q = Q(A)$ を，

$$Q: A \text{ が零行列でない.}$$

と定める．「P ならば Q」が成り立つので，Q は P の必要条件である．命題 $R = R(A)$ を，

$$R: A \text{ は単位行列である.}$$

と定める．「R ならば P」が成り立つので，R は P の十分条件である．命題 $S = S(A)$ を，

$$S : A \text{ の行列式 } \det(A) \text{ が } 0 \text{ でない．}$$

と定める．「P ならば S」が成り立ち，「S ならば P」が成り立つので，S は P の必要十分条件である．

上の問では，必要十分条件を求めることが要求されていると考えられる．したがって，正解は，

解． $\det(A) = 1 - a^2 \neq 0$ より，$a^2 \neq 1$ すなわち $a \neq \pm 1$

となる．ここで，$a \neq \pm 1$ は $a \neq 1$ かつ $a \neq -1$ という意味である．

なお，$a \neq 1$ という答えは，必要条件であるが十分条件でないので不正解である（十分性が十分に吟味されていない）．また，$a = 0$ という答えは，十分条件であるが必要条件でないので不正解である（必要性を考える必要がある）．

☞ 必要十分条件（2.6 節）．条件文（2.1 節）．

✔**注意 1.15（条件と性質の違い）** 条件 (condition) と性質 (property) という用語の使い方の違いは何か．どちらも，扱っている対象に関する 1 つの主張の形で述べられることは類似している．2 つの用語のニュアンスの違いは，次の通りである．すなわち，

主張に注目し，その主張が成り立つかどうかで対象を規定するときは「条件」，
対象に注目して，その対象について成り立つ主張を述べるときは「性質」，

という意識上の区別があると考えてよいであろう．

1.10　逆

命題「P ならば Q」の**逆** (converse) とは，命題「Q ならば P」のことである．

◈**例 1.16**　「美しいものにはトゲがある」という言葉を「美しい，ならば，トゲがある」と解釈すれば，その逆は，「トゲがあれば美しい」となる．

◈**例 1.17**　命題「$x \geq 2$ ならば $x \geq 1$」の逆は，命題「$x \geq 1$ ならば $x \geq 2$」である．

命題「P ならば Q」が成り立つからといって，その逆の命題「Q ならば P」は必ずしも成り立たない．「逆も真なり」は正しい論法ではなく，「逆，必ずしも真ならず」が正しい見識である．
☞ 対偶と逆（2.12 節）．

◈**例 1.18**　任意の実数 x について，「$x \geq 2$ ならば $x \geq 1$」が成り立つが，その逆「$x \geq 1$ ならば $x \geq 2$」は必ずしも正しくない．正しくないような実数 x がある．実際，$2 > x \geq 1$ の場合，$x \geq 1$ は真であるが，$x \geq 2$ は偽である．よって，このような x について，「$x \geq 1$ ならば $x \geq 2$」は偽である．

1.11　〜のとき，そのときに限り (if and only if)

必要十分条件の意味である．

◈**例 1.19**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ が正則行列になるのは，$a \neq \pm 1$ のとき，そのときに限る．The matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ is a regular matrix if and only if $a \neq \pm 1$.
☞ 必要条件，十分条件，ならば（1.5 節）．

1.12　〜が必要である

日常語と数学語ではニュアンスが多少異なる場合がある．「〜が必要である」という用語もそうである．

◈**例 1.20**（**必要条件**）

君には努力が必要である．

という文章を考えよう．これを補うと，「君の目標を達成するためにはさらに努力が必要である」となる．この意味は，「君が目標を達成した，ならば，君は努力した（はずだ)」ということである．努力は，あくまで必要条件である，目標を達成するには，努力以外の要素（素質とか環境とか）が必要かもしれない，ということである．ここで，著者自身にとって感慨深い文例を挙げておく：

よい本を書くには，さらに努力が必要である．

◆**例 1.21（必要条件と必要十分条件の違いがわかる明確な例）**　次のような問と，その問に関する答案の例を見てみよう．

> **問.**　方程式 $x = \sqrt{2x^2 - 1}$ の実数解を求めよ．
> **答案.**　方程式 $x = \sqrt{2x^2 - 1}$ の両辺を 2 乗して，$x^2 = 2x^2 - 1$.
> よって，$x^2 = 1$. したがって，$x = \pm 1 \ \cdots$ （答).

上の答案は推論としては悪くないが，残念ながら正解ではない．減点されるだろう．なぜなら，$x = 1$ は解であるが，$x = -1$ は解ではないからだ．実際，$x = -1$ を方程式に入れてみると，$-1 = 1$ となって方程式が成り立たないことがわかる．最後に，本当にそれが解であるかどうか吟味しなければいけない状況であったのだ．

なぜ間違えたのか．なぜ最後に実際に解かどうか吟味しなければいけなかったのか．その理由は簡単だ．方程式を解く際，「$x = \sqrt{2x^2 - 1}$ の両辺を 2 乗して，$x^2 = 2x^2 - 1$」というステップで，方程式の“情報”を落としていたからである．すなわち上の答案は必要条件で押していく推論であり，必要十分条件のまま推論しているわけではなかったということだ．条件「$x^2 = 2x^2 - 1$」は，条件「$x = \sqrt{2x^2 - 1}$」のための必要条件であって，十分条件ではない．だから，まさに「不十分」な答案だったわけである．

1.13　したがって，よって，ゆえに

P ならば Q という主張が成り立っていることはわかっていて，さらに，P が成り立つことが示された時点で，したがって Q が成り立つ，ということにな