

大学新入生のための 線形代数 入門

石村 園子 著

共立出版

大学新入生のための

線形代数
入門

石村 園子 著

共立出版

まえがき

2014年、今までに経験したことのない大雨とスーパー台風にみまわれ、2011年の大震災以来、あらためて自然の力を思い知らされました。命を落とされた方々には心より哀悼の意を表します。運良く残った我々は、残され生かされている自分たちの時間を有意義に使う使命を負っているように感じます。

社会が目まぐるしく変化する中、ゆとり教育や学力低下の問題を受け、政府は小中高の学習指導要領改訂を行いました。学習時間も指導内容も増えましたが、この新指導要領下で勉強した生徒たちが初めて大学生になるのが、2015年の4月です。高校数学の科目に関しては、

数学I, 数学II, 数学III, 数学A, 数学B, 数学活用となりました。科目数は減りましたが内容は増えています。しかし、旧数学Cに含まれていた「行列」に関する単元はなくなってしまいしたので、大学生になり「線形代数」を学ぶ際、「ベクトル」の知識以外は予備知識が全くない状態になっています。

そこで本書は、かつての数学Cに含まれていた「行列」の内容を含みながら線形代数の勉強を始められる入門書として企画されました。行列、行列式は一般の場合は避けて3次までにとどめ、その範囲で学習できる線形空間、線形写像、行列の対角化まで取り扱っています。また他の姉妹書*同様、練習問題の章を設け、解答もなるべく飛躍のないように付けてありますので、有効に利用して理解の助けにしてください。さらに線形代数の一般論を学びたい学生にとっては、容易により抽象的な内容へ入っていけることでしょう。

*) 『大学新入生のための数学入門（増補版）』
『大学新入生のための微分積分入門』

科学技術は日々進歩していますが、人類の心は一向に変わっていないのではないか。有史以来、現在もなお世界のあちこちで争いが続いている。日本も戦後70年、何とか平和に発展してきましたが、気を許すといつまた戦争に巻き込まれるかわかりません。日本は教育のおかげでここまで発展してきましたが、戦渦で勉強できず、将来の希望が持てない子供たちのことを思い、学生の皆さん、大学で今勉強できる幸運をしっかりとこみしめ、将来の夢への第一歩を踏み出してください。

最後に、本書の執筆を勧めてくださいました共立出版株式会社取締役の寿日出男氏に心よりお礼を申し上げます。同氏は今回も、大学の先生方のご要望や学生の様子などの教育現場を鋭く分析し、著者への適切なアドバイスをくださいました。また、いつもながら締め切りに追われ、著者と印刷所の間に挟まってストレスの多い編集の仕事をしてくださっている頼りになる吉村修司さん、そして共立出版の他の多くの皆様にも心よりお礼申し上げます。

本書の練習問題の解答チェックは石村友二郎に手伝ってもらいました。またイラストは、今年初めに訪れたアフリカで感銘を受けた野生動物にちなんで、石村多賀子に描いてもらいました。

2014年 二百十日
石村園子

ジラフです。
これから線形代数と一緒に
勉強しましょう。
私がやさしく説明しますよ。



ヒッポです。
ジラフ先生、どうぞよろしく
お願いします。



もくじ

① 連立 1 次方程式と行列 1

〈1〉 連立 1 次方程式 2

例題 1.1 [2 元連立 1 次方程式]

〈2〉 連立 1 次方程式と行列 4

例題 1.2 [連立 1 次方程式と行列 1]

例題 1.3 [連立 1 次方程式と行列 2]

〈3〉 行基本変形 8

例題 1.4 [行基本変形 1]

例題 1.5 [行基本変形 2]

例題 1.6 [行変形による解法 1]

例題 1.7 [行変形による解法 2]

例題 1.8 [行変形による解法 3]

〈4〉 掃き出し法 16

例題 1.9 [掃き出し法 1]

例題 1.10 [掃き出し法 2]

〈5〉 行列の階数 20

例題 1.11 [行列の階数と解 1]

例題 1.12 [行列の階数と解 2]

例題 1.13 [行列の階数と解 3]

例題 1.14 [行列の階数と解 4]

② 連立 1 次方程式と行列式 29

〈1〉 2 次の行列式 30

例題 2.1 [2 次の行列式]

〈2〉 3 次の行列式 34

例題 2.2 [3 次の行列式]

〈3〉 クラメールの公式 38

例題 2.3 [クラメールの公式 1]

例題 2.4 [クラメールの公式 2]

例題 2.5 [クラメールの公式 3]

とくとく情報 [4 次以上の行列式] 44

3 行列の演算 45

〈1〉 行列の和, 差, 定数倍 46

例題 3.1 [行列の和, 差, 定数倍 1]

例題 3.2 [行列の和, 差, 定数倍 2]

〈2〉 行列の積 50

例題 3.3 [行列の積 1]

例題 3.4 [行列の積 2]

例題 3.5 [行列の積と行列式]

〈3〉 正方行列と逆行列 56

例題 3.6 [2 次の正方行列の逆行列 1]

例題 3.7 [2 次の正方行列の逆行列 2]

例題 3.8 [3 次の正方行列の逆行列]

例題 3.9 [逆行列を使った連立 1 次方程式の解 1]

例題 3.10 [逆行列を使った連立 1 次方程式の解 2]

例題 3.11 [行列の積と逆行列]

4 ベクトル空間 69

〈1〉 平面ベクトルと空間ベクトル 70

例題 4.1 [ベクトルと長さ]

例題 4.2 [ベクトルの和, 差, 定数倍]

例題 4.3 [ベクトルの計算]

例題 4.4 [平面ベクトルの成分表示]

例題 4.5 [平面ベクトルの成分と大きさ]

例題 4.6 [平面ベクトルの内積となす角]

例題 4.7 [平面における垂直な単位ベクトル]

例題 4.8 [空間ベクトルの成分表示と大きさ]

例題 4.9 [空間ベクトルの内積となす角]

例題 4.10 [空間における垂直な単位ベクトル]

〈2〉 ベクトル空間 80

〈3〉 線形結合 82

例題 4.11 [線形結合 1]

例題 4.12 [線形結合 2]

例題 4.13 [線形結合 3]

例題 4.14 [線形結合 4]

例題 4.15 [線形結合 5]

例題 4.16 [線形結合 6]

〈4〉 線形独立, 線形従属 89

例題 4.17 [線形独立, 線形従属 1]

例題 4.18 [線形独立, 線形従属 2]

とくとく情報 [連立 1 次方程式の解がつくる

ベクトル空間] 94

5 線形写像と行列 95

〈1〉 写像 96

例題 5.1 [\mathbf{R}^2 の写像]

例題 5.2 [\mathbf{R}^3 の写像]

〈2〉 線形写像 99

例題 5.3 [線形写像 1]

例題 5.4 [線形写像 2]

例題 5.5 [線形写像 3]

例題 5.6 [線形写像 4]

例題 5.7 [平面上の点の移動]

例題 5.8 [平面上の図形の移動]

例題 5.9 [平面上の点の回転移動]

〈3〉 合成写像 108

例題 5.10 [合成写像 1]

例題 5.11 [合成写像 2]

〈4〉 逆写像 111

例題 5.12 [逆写像 1]

例題 5.13 [逆写像 2]

〈5〉 固有値と固有ベクトル 114

例題 5.14 [固有値]

例題 5.15 [固有ベクトル]

とくとく情報 [加法定理も線形写像で] 118

〈6〉 対角化 119

例題 5.16 [行列の対角化 1]

例題 5.17 [行列の対角化 2]

例題 5.18 [対称行列の対角化]

例題 5.19 [対角化の応用 1]

例題 5.20 [対角化の応用 2]

6 練習問題 135

① 連立 1 次方程式と行列 136

② 連立 1 次方程式と行列式 139

③ 行列の演算 140

④ ベクトル空間 142

⑤ 線形写像と行列 147

7 問題の解答 153

さくいん 227

① 連立 1 次 方 程 式 と 行 列

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y-3z=0 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$$



掃き出し法

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

連立 1 次 方 程 式 と 行 列 の
ふか～い 関 係 を
勉 強 し て い き ま し ょ う。

行 基 本 变 形

階 数

自 由 度

行列 って 何 か し ら ?
楽 し み だ わ。



〈1〉 連立 1 次方程式

例題 1.1 [2 元連立 1 次方程式]

方程式において、これから \oplus 値を求めるようとする文字を未知数といいます。未知数の数により

2 元連立 1 次方程式

3 元連立 1 次方程式

⋮

などといいます。

次の連立 1 次方程式を解いてみましょう。

$$(1) \begin{cases} x + y = 2 & \text{①} \\ 3x - 2y = 1 & \text{②} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 0 & \text{①} \\ 3x - 6y = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 2y = 0 & \text{①} \\ 3x - 6y = -6 & \text{②} \end{cases}$$

解 各式に、上のように番号をつけておきます。係数をよくながめてどの未知数をはじめに消去するか方針をたてましょう。

(1) たとえば y を消去する方針で解くと $2 \times \text{①} + \text{②}$ を計算して

$$\begin{array}{rcl} 2 \times \text{①} & 2x + 2y = 4 \\ +) & \text{②} & 3x - 2y = 1 \\ \hline & 5x & = 5 \rightarrow x = 1 \end{array}$$

①へ代入して $1 + y = 2$, $y = 2 - 1 = 1$

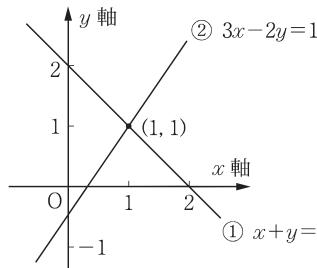
以上より $x = 1, y = 1$

・ちょっと解説・

(1) の①と②の式は

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

と変形され、(1)の解はこれらを式にもつ 2 直線の共有点の座標を表しています。



「 \Leftrightarrow 」は同値な変形を示し \oplus ます。つまり、矢印のどつち方向にも変形可能な変形です。

(2) ①と②の式をよく見てみると、 $\frac{1}{3} \times \text{②}$ は①の式と同じです。つまり,

$$\begin{cases} x - 2y = 0 & \text{①} \\ 3x - 6y = 0 & \text{②} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 & \text{①} \\ x - 2y = 0 & \text{②}' \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 0 \quad \text{①}$$

見かけは 2 つの式からなる連立 1 次方程式ですが、本質的には 1 つの式です。2 つの未知数があるのに式が 1 つしかありません。したがって、①より

$$x = 2y \quad \text{③}$$

という関係をもつ x, y の値の組ならすべて解になります。そこで

$y=t$ (t は任意の実数) とおくと③へ代入して

$$x=2t$$

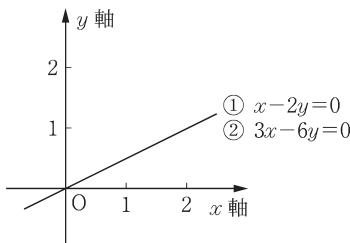
となります。これより解の組は無数にあり、

$$x=2t, y=t \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表すことができます。

・ちょっと解説・

①と②の表す直線は同じなので、2直線の共有点は無数にあることを示しています。



(3) ②の式を $\frac{1}{3}$ 倍すると

$$x - 2y = -2$$

この式の左辺は①の左辺と同じなので

$$0 = -2$$

となります。これは矛盾した式です。このことは①, ②の両方の式を同時に満たす x, y の組は存在しないことを意味しています。つまり

解なし

です。

(解終)

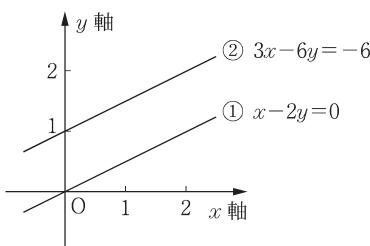
・ちょっと解説・

①と②は

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

と変形されるので、これらの表す2直線は平行で共有点はありません。



連立1次方程式ってみんな解があると思っていましたわ！



問題 1.1 (解答は p. 154)

次の連立1次方程式を解いてください。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = -2 & ① \\ 6x + 5y = -6 & ② \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 6x + 4y = 0 & ① \\ 9x + 6y = 0 & ② \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - 6y = 1 & ① \\ -x + 3y = 2 & ② \end{cases}$$

〈2〉 連立 1 次方程式と行列

次の 2 つの連立 1 次方程式を比べてください。

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = -3 \\ 3x - 2y = 4 \end{array} \right. \quad \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 3a - 2b = 4 \end{array} \right. \end{array}$$

これらは、未知数を表わす文字は異なりますが、全く同じ係数をもっています。ですから、両方は同じ解をもちます。

このように、連立 1 次方程式の本質は係数で決まり、係数こそ重要な情報なのです。

そこで係数だけを取り出し、カッコでくくって並べてみましょう。

[] を使う場合もあります。⇒

“行列”は英語で“matrix”⇒

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

これが**行列**です。この数字のかたまりで 1 つの情報を表わしています。

行 とは 横に並んだ数字のこと

列 とは 縦に並んだ数字のこと
を意味し、上から順に

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{第 1 行} \\ \text{第 2 行} \end{array}$$

左から順に

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑
第 1 列 第 2 列 第 3 列

“(2,3)型の行列”ともいい⇒
ます。

と名前がついています。行数と列数により行列の型が決まり、上の行列は**2 行 3 列の行列**とよばれます。

また行列の各数字を**成分**といい、第何行と第何列の交差点に位置するかにより

(行番号, 列番号) 成分

とよばれます。たとえば

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(1,2)成分} \\ \text{第 1 行} \\ \text{第 2 行} \end{array}$$

↑
第 2 列

となります。

“マトリックス”という
言葉はよく聞きますわ。



行列は A, B, \dots などおもに英大文字を使って表します。

2 つの行列 A, B があったとき、

行の数も列の数も同じ

数字の並びも全く同じ

ときに限り、行列として“等しい”と定義し

● 行列の相等

$$A=B$$

とかきます。

前頁の連立 1 次方程式の係数からなる**係数行列**は

$$\text{①は } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{②は } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

A も B も 2 行 3 列の行列

数字の並びも全く同じ

なので、

$$A=B$$

です。

今までのことを一般的に文字を使って書き表しておきましょう。

行列とは、 m 行 n 列 (m, n は自然数) に並んだ数字または文字の配列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一般的な書き方
にも、少しずつ慣れて
ください。



のことでので、おもに A, B, C, \dots などの英大文字を使って表します。

上記の行列 A は m 行 n 列の行列です。

また各行、各列と成分は次のように呼ばれます。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

● (i, j) 成分

a_{ij}
行番号 ↑
列番号 ↑

これから扱う連立 1 次方程式は、左頁上の①, ②のように、未知数を含んだ項は左辺に、定数項は右辺にかくこととしておきます。

例題 1.2 [連立 1 次方程式と行列 1]

$$\begin{cases} x - 4y + 6z = -3 \\ 2x - 5y + 5z = 3 \\ -6y + 4z = -1 \end{cases}$$

- (1) 上記の連立 1 次方程式から係数を取り出して係数行列 A をつくってみましょう。
- (2) A は何行何列の行列ですか。
- (3) A の第 2 行と第 4 列を囲ってみましょう。
- (4) A の (2, 4) 成分を求めてみましょう。
- (5) A の (3, 1) 成分を求めてみましょう。
- (6) 「-1」は何成分ですか。

解 (1) 第 3 式の x の係数に注意して、係数を取り出して並べると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ 2 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 行の数は 3, 列の数は 4 なので

3 行 4 列 の行列

(3) 第 2 行と第 4 列は次の通り。

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 2 行}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ 2 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

↑ 第 4 列

(4) (2, 4) 成分 = 第 2 行と第 4 列の交差点に位置する成分

$$= 3$$

(5) (3, 1) 成分 = 第 3 行と第 1 列の交差点に位置する成分

$$= 0$$

(6) -1 = 第 3 行と第 4 列の交差点に位置する成分

$$= (3, 4) \text{ 成分}$$

(解終)

行列って、数字が長方形や正方形に並んでいるだけですね。おずかしくないですわ。



問題 1.2 (解答は p. 154)

- $$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 7 \\ x + 2y = 5 \\ 2x - y + 5z = 8 \end{cases}$$
- (1) 左の連立 1 次方程式から係数を取り出して係数行列 B をつくってください。
- (2) B は何行何列の行列ですか。
- (3) B の第 2 行と第 1 列を囲ってください。
- (4) B の (2, 1) 成分を求めてください。
- (5) B の (3, 3) 成分を求めてください。
- (6) 「0」は何成分ですか。

例題 1.3 [連立1次方程式と行列 2]

次の行列 A, B はそれぞれ連立1次方程式の係数行列で、最後の列は定数項を表しています。行列 A, B よりそれともとの連立1次方程式をつくってみましょう。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解 連立1次方程式の未知数の文字は何でもかまいません。

(1) 最後の列は定数項を表しているので、未知数の数は2個。それらを x, y とし、行列を見ながら方程式をつくると

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y = -5 \\ 3 \cdot x - 4 \cdot y = 6 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

(2) 最後の列は定数項なので、未知数の数は3個。それらを x, y, z とし、行列を見ながら方程式をつくると

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 0 \cdot z = -2 \\ 0 \cdot x + 5 \cdot y - 1 \cdot z = 0 \\ 3 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z = 1 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 5y - z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases} \quad (\text{解終})$$

係数「0」に気をつけましょう。

最後の列は方程式の右辺の定数項ですね。



問題 1.3 (解答は p.154)

次の行列 C, D はそれぞれ連立1次方程式の係数行列で、最後の列は定数項を表しています。もとの連立1次方程式をつくってください。

$$(1) \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

〈3〉 行基本変形

ここでは連立 1 次方程式を行列を使って解くことを考えてみましょう。

はじめに、連立 1 次方程式の解を求める過程を、**同値な式の変形**ととらえてみます。ここでいう“同値な式の変形”とは、逆の方向にもどれる変形のことです。たとえば

$$\begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 3x-y=7 & \text{②} \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{①+②} \\ \text{③}}} 5x=10 \quad \text{③}$$

のように、左側の式の組から y を消去するために①+②という計算を行って③を出しますが、③から①や②は導けません。つまりこの変形は同値な式の変形ではありません。次のように、どちらかの式を残しておくと同値な式の変形となります。

$$\begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 3x-y=7 & \text{②} \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{①+②} \\ \text{②}-\text{①}'}} \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①}' \\ 5x=10 & \text{②}'=\text{①}+\text{②} \end{cases}$$

この“同値な式の変形”(\iff で示す)により上の連立 1 次方程式を解いてみましょう。(式番号は、常に第 1 式を①、第 2 式を②で表示しておきます。)

$$\begin{array}{lll} \textcircled{a} & \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 3x-y=7 & \text{②} \end{cases} & \xrightarrow{\substack{\text{②}+\text{①} \\ \text{②}-\text{①}'}} \textcircled{b} \quad \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 5x=10 & \text{②} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\substack{\text{②}\times\frac{1}{5} \\ \text{②}\times 5}} \textcircled{c} \quad \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ x=2 & \text{②} \end{cases} & \\ & \xrightarrow{\substack{\text{②}\times 2 \\ \text{②}\times\frac{1}{2}}} \textcircled{d} \quad \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 2x=4 & \text{②} \end{cases} & \\ & \xrightarrow{\substack{\text{①}-\text{②} \\ \text{①}+\text{②}}} \textcircled{e} \quad \begin{cases} y=-1 & \text{①} \\ 2x=4 & \text{②} \end{cases} & \\ & \xrightarrow{\substack{\text{②}\times\frac{1}{2} \\ \text{②}\times 2}} \textcircled{f} \quad \begin{cases} y=-1 & \text{①} \\ x=2 & \text{②} \end{cases} & \\ & \xrightarrow{\substack{\text{入れかえ} \\ \text{入れかえ}}} \textcircled{g} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} & \end{array}$$

“同値な式の変形”
なんて、今まであまり
意識してこなかったですね。



ここで使われている変形は

- I. ある式を k 倍 ($k \neq 0$) する
- II'. ある式に他の式を加えたり引いたりする
- III. 式を入れかえる

の 3 つです。しかし上記の変形の途中、④で x の値がせっかく求まっているのに $2x$ を消去するために④、⑤ではそれを 2 倍していく少

し効率が悪くなっています。そこでII'の代わりにIとII'を同時に行う

II. ある式に他の式を k 倍して加える
という変形を使います。

連立1次方程式の同値な式の変形をまとめておきましょう。

連立1次方程式の同値な式の変形

- I. ある式を k 倍 ($k \neq 0$) する。
- II. ある式に他の式を k 倍して加える。
- III. 式を入れかえる。

上の同値な式の変形を使って改めて解くと、

$$\begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 3x-y=7 & \text{②} \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{II. } \text{②+①}\times 1 \\ \text{II. } \text{②+①}\times (-1)}} \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ 5x = 10 & \text{②} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{I. } \text{②}\times \frac{1}{5} \\ \text{I. } \text{②}\times 5}} \begin{cases} 2x+y=3 & \text{①} \\ x = 2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{II. } \text{①+②}\times (-2) \\ \text{II. } \text{①+②}\times 2}} \begin{cases} y = -1 & \text{①} \\ x = 2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{III. 入れかえ} \\ \text{III. 入れかえ}}} \begin{cases} x = 2 & \text{①} \\ y = -1 & \text{②} \end{cases}$$

となり、先ほどよりすっきりしました。

この変形を行列を使って表してみましょう。係数だけを取り出して()でくくればよいだけです。一番右の列は定数項なので|を入れて区別しておくことにします。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 3 \\ 3 & -1 & | & 7 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 3 \\ 5 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

これが行列を使った連立1次方程式の解法です。

使った同値な式の変形を行列の言葉に直しておきましょう。この3つの変形を**行列の行基本変形**といいます。

|を入れて
右辺が定数項であること
をはっきりとさせます。



行列の行基本変形

- I. ある行を k 倍 ($k \neq 0$) する。
- II. ある行に他の行を k 倍して加える。
- III. 行を入れかえる。

● 行ごとに変形です。

行ごとの変形は式の変形を意味しています。

例題 1.4 [行基本変形 1]

次の行列に(1),(2),(3)の行基本変形を順に続けて行ってみましょう。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 第2行を $\frac{1}{2}$ 倍する (変形I)。
- (2) 第2行に第1行を2倍して加える (変形II)。
- (3) 第1行と第2行を入れかえる (変形III)。

・ちょっと解説・

行基本変形は略して次のように表記することとします。

①, ②は行番号を表します。 ↗



I. $\textcircled{i} \times k$ … 第*i*行を *k*倍 (*k* ≠ 0) する。

II. $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times k$ … 第*i*行に第*j*行を *k*倍して加える。

III. $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ … 第*i*行と第*j*行を入れかえる。

また、変形前の行列と変形後の行列は異なった行列なので「→」を使って変形していきます。「=」は行列として等しいことを意味しているので、行基本変形には使えません。

解 行列を順に続けて変形していきましょう。

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(1) \quad \textcircled{2} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 \times \frac{1}{2} & -4 \times \frac{1}{2} & 0 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(2) \quad \textcircled{2} + \textcircled{1} \times 2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 + (-2) \times 2 & -2 + 1 \times 2 & 0 + 3 \times 2 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{((2)の変形IIが} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{むずかしいですわ～！)} \\
 \xrightarrow{(3) \quad \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{解終})
 \end{array}$$



問題 1.4 (解答は p. 154)

次の行列に(1),(2),(3)の行基本変形を順に続けて行ってください。また、変形の→の上には、どのような変形を行ったかを記しておいてください。

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad
 \begin{array}{l}
 (1) \text{ 第1行を } \frac{1}{3} \text{ 倍する (変形I).} \\
 (2) \text{ 第2行に第1行を } 4 \text{ 倍して加える (変形II).} \\
 (3) \text{ 第1行と第2行を入れかえる (変形III).}
 \end{array}$$