大学新入生のための

線形代数入門

石村 園子 著

共立出版

大学新入生のための

線形代数入門

石村 園子 著

共立出版

まえがき

2014 年，今までに経験したことのない大雨とスーパー台風にみまわれ，2011 年の大震災以来，あらためて自然の力を思い知らされました。命を落とされた方々には心より哀悼の意を表します。運良く残った我々は，残され生かされている自分たちの時間を有意義に使う使命を負っているように感じます。

社会が目まぐるしく変化する中，ゆとり教育や学力低下の問題を受け，政府は小中高の学習指導要領改訂を行いました。学習時間も指導内容も増えましたが，この新指導要領下で勉強した生徒たちが初めて大学生になるのが，2015 年の 4 月です。高校数学の科目に関しては，

数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B，数学活用

となりました。科目数は減りましたが内容は増えています。しかし，旧数学 C に含まれていた「行列」に関する単元はなくなってしまいましたので，大学生になり「線形代数」を学ぶ際，「ベクトル」の知識以外は予備知識が全くない状態になっています。

そこで本書は，かつての数学 C に含まれていた「行列」の内容を含みながら線形代数の勉強を始められる入門書として企画されました。行列，行列式は一般の場合は避けて 3 次までにとどめ，その範囲で学習できる線形空間，線形写像，行列の対角化まで取り扱っています。また他の姉妹書* 同様，練習問題の章を設け，解答もなるべく飛躍のないように付けてありますので，有効に利用して理解の助けにしてください。さらに線形代数の一般論を学びたい学生にとっては，容易により抽象的な内容へ入っていけることでしょう。

＊）『大学新入生のための数学入門（増補版）』
『大学新入生のための微分積分入門』

　科学技術は日々進歩していますが，人類の心は一向に変わっていないのではないでしょうか。有史以来，現在もなお世界のあちこちで争いが続いています。日本も戦後 70 年，何とか平和に発展してきましたが，気を許すといつまた戦争に巻き込まれるかわかりません。日本は教育のおかげでここまで発展してきましたが，戦渦で勉強できず，将来の希望が持てない子供たちのことを思い，学生の皆さん，大学で今勉強できる幸運をしっかりとかみしめ，将来の夢への第一歩を踏み出してください。

　最後に，本書の執筆を勧めてくださいました共立出版株式会社取締役の寿日出男氏に心よりお礼を申し上げます。同氏は今回も，大学の先生方のご要望や学生の様子などの教育現場を鋭く分析し，著者への適切なアドバイスをくださいました。また，いつもながら締め切りに追われ，著者と印刷所の間に挟まってストレスの多い編集の仕事をしてくださっている頼りになる吉村修司さん，そして共立出版の他の多くの皆様にも心よりお礼申し上げます。

　本書の練習問題の解答チェックは石村友二郎に手伝ってもらいました。またイラストは，今年初めに訪れたアフリカで感銘を受けた野生動物にちなんで，石村多賀子に描いてもらいました。

2014 年　二百十日

石村園子

もくじ


① 連立１次方程式と行列
2x+3y=5
3x−4y=−1
2x+y+z=2
x−y−3z=0
2x+2y−z=1
2 3
3 −4
掃き出し法
2 3 5
3 −4 −1
行基本変
階数
自由度
連立１次方程式と行列のふか～い関係を勉強していきましょう。
行列って何かしら？楽しみだわ。

〈1〉 連立１次方程式

例題 1.1 [2 元連立１次方程式]

次の連立１次方程式を解いてみましょう。

（１） $\begin{cases} x+\ \ y=2 & ① \\ 3x-2y=1 & ② \end{cases}$　（２） $\begin{cases} x-2y=0 & ① \\ 3x-6y=0 & ② \end{cases}$

（３） $\begin{cases} x-2y=\ \ 0 & ① \\ 3x-6y=-6 & ② \end{cases}$

方程式において，これから値を求めようとする文字を未知数といいます。未知数の数により
　２元連立１次方程式
　３元連立１次方程式
　　⋮
などといいます。

解　各式に，上のように番号をつけておきます。係数をよくながめてどの未知数をはじめに消去するか方針をたてましょう。

（１）　たとえば y を消去する方針で解くと　2×①＋②　を計算して

$$\begin{array}{rrl} & 2\times① & 2x+2y=4 \\ +) & ② & 3x-2y=1 \\ \hline & & 5x \qquad =5 \longrightarrow \quad x=1 \end{array}$$

①へ代入して　$1+y=2$,　　$y=2-1=1$

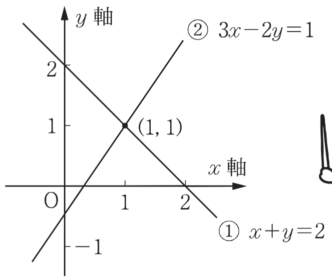
以上より　　$x=1$,　$y=1$

・ちょっと解説・

（１）の①と②の式は

$$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と変形され，（１）の解はこれらを式にもつ２直線の共有点の座標を表しています。



「⟺」は同値な変形を示します。つまり，矢印のどっち方向にも変形可能な変形です。

（２）　①と②の式をよく見てみると，$\dfrac{1}{3}$×②は①の式と同じです。

つまり，

$$\begin{cases} x-2y=0 & ① \\ 3x-6y=0 & ② \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y=0 & ① \\ x-2y=0 & ②' \end{cases} \iff x-2y=0 \quad ①$$

見かけは２つの式からなる連立１次方程式ですが，本質的には１つの式です。２つの未知数があるのに式が１つしかありません。したがって，①より

$$x=2y \quad ③$$

という関係をもつ x, y の値の組ならすべて解になります。そこで

$y=t$（t は任意の実数）とおくと③へ代入して

$$x=2t$$

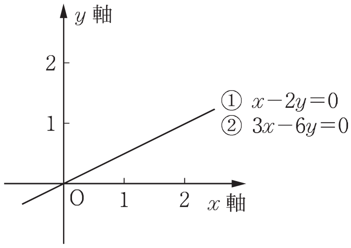
となります。これより解の組は無数にあり，

$$x=2t,\ y=t \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表すことができます。

・ちょっと解説・

①と②の表す直線は同じなので，2 直線の共有点は無数にあることを示しています。



（3）　②の式を $\frac{1}{3}$ 倍すると

$$x-2y=-2$$

この式の左辺は①の左辺と同じなので

$$0=-2$$

となります。これは矛盾した式です。このことは①, ②の両方の式を同時に満たす x, y の組は存在しないことを意味しています。つまり

解なし

です。　（解終）

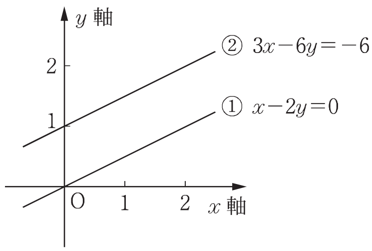
・ちょっと解説・

①と②は

$$y=\frac{1}{2}x$$

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

と変形されるので，これらの表す 2 直線は平行で共有点は存在しません。



問題 1.1（解答は p. 154）

次の連立 1 次方程式を解いてください。

（1）$\begin{cases} 3x+2y=-2 & ① \\ 6x+5y=-6 & ② \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 6x+4y=0 & ① \\ 9x+6y=0 & ② \end{cases}$　（3）$\begin{cases} 2x-6y=1 & ① \\ -x+3y=2 & ② \end{cases}$

〈2〉 連立１次方程式と行列

次の２つの連立１次方程式を比べてください。

$$
① \begin{cases} 2x+\ \ y=-3 \\ 3x-2y=\ \ \ 4 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 2a+\ \ b=-3 \\ 3a-2b=\ \ \ 4 \end{cases}
$$

これらは，未知数を表わす文字は異なりますが，全く同じ係数をもっています。ですから，両方は同じ解をもちます。

このように，連立１次方程式の本質は係数で決まり，係数こそ重要な情報なのです。

そこで係数だけを取り出し，カッコでくくって並べてみましょう。

［　］を使う場合もあります。

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}
$$

“行列”は英語で“matrix”

これが**行列**です。この数字のかたまりで１つの情報を表わしています。

行　とは　横に並んだ数字のこと

列　とは　縦に並んだ数字のこと

を意味し，上から順に

$$
\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第１行} \\ \leftarrow \text{第２行} \end{array} \end{array}
$$

左から順に

$$
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第１列} & \text{第２列} & \text{第３列} \end{array} \end{array}
$$

“(2, 3) 型の行列”ともいいます。

と名前がついています。行数と列数により行列の型が決まり，上の行列は **2 行 3 列の行列**とよばれます。

また行列の各数字を**成分**といい，第何行と第何列の交差点に位置するかにより

（行番号，列番号）成分

とよばれます。たとえば

$$
\begin{array}{cl} & \text{(1, 2) 成分} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第１行} \\ \quad\ \ \uparrow & \\ \quad\ \ \text{第２列} & \end{array}
$$

となります。

行列は $A, B, \cdots$ などおもに英大文字を使って表します。

2つの行列 A, B があったとき，

行の数も列の数も同じ

数字の並びも全く同じ

ときに限り，行列として“等しい”と定義し

$$A=B$$

とかきます。

➡ 行列の相等

前頁の連立1次方程式の係数からなる**係数行列**は

$$①は\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$②は\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

A も B も 2行3列の行列

数字の並びも全く同じ

なので，

$$A=B$$

です。

今までのことを一般的に文字を使って書き表しておきましょう。

行列とは，m 行 n 列（m, n は自然数）に並んだ数字または文字の配列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のことで，おもに $A, B, C, \cdots$ などの英大文字を使って表します。

上記の行列 A は m 行 n 列の行列です。

また各行，各列と成分は次のようによばれます。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 行

第 j 列

(i, j) 成分

➡ (i, j) 成分

a_{ij}

行番号

列番号

これから扱う連立1次方程式は，左頁上の①, ②のように，未知数を含んだ項は左辺に，定数項は右辺にかくこととしておきます。

例題 1.2［連立 1 次方程式と行列 1］

$$\begin{cases} x-4y+6z=-3 \\ 2x-5y+5z=\ \ 3 \\ \quad -6y+4z=-1 \end{cases}$$

（1）　上記の連立 1 次方程式から係数を取り出して係数行列 A をつくってみましょう。

（2）　A は何行何列の行列ですか。

（3）　A の第 2 行と第 4 列を囲ってみましょう。

（4）　A の $(2, 4)$ 成分を求めてみましょう。

（5）　A の $(3, 1)$ 成分を求めてみましょう。

（6）「-1」は何成分ですか。

解　（1）　第 3 式の x の係数に注意して，係数を取り出して並べると

$$A=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -3 \\ 2 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$$

（2）　行の数は 3，列の数は 4 なので

$\boxed{3 行 4 列}$ の行列

（3）　第 2 行と第 4 列は次の通り。

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 3 \\ \boxed{2 \quad -5 \quad 5 \quad 3} \\ 0 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow 第 2 行, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & \boxed{-3} \\ 2 & -5 & 5 & \boxed{3} \\ 0 & -6 & 4 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

第 4 列

（4）　$(2, 4)$ 成分＝第 2 行と第 4 列の交差点に位置する成分

$=\boxed{3}$

（5）　$(3, 1)$ 成分＝第 3 行と第 1 列の交差点に位置する成分

$=\boxed{0}$

（6）　-1＝第 3 行と第 4 列の交差点に位置する成分

$=\boxed{(3, 4) 成分}$　　　（解終）

問題 1.2（解答は p. 154）

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=7 \\ \ \ x+2y \qquad\ \ =5 \\ 2x-\ \ y+5z=8 \end{cases}$$

（1）　左の連立 1 次方程式から係数を取り出して係数行列 B をつくってください。

（2）　B は何行何列の行列ですか。

（3）　B の第 2 行と第 1 列を囲ってください。

（4）　B の $(2, 1)$ 成分を求めてください。

（5）　B の $(3, 3)$ 成分を求めてください。

（6）「0」は何成分ですか。

例題 1.3［連立１次方程式と行列 2］

次の行列 A, B はそれぞれ連立１次方程式の係数行列で，最後の列は定数項を表しています。行列 A, B よりそれぞれもとの連立１次方程式をつくってみましょう。

（１） $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ （２） $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解 連立１次方程式の未知数の文字は何でもかまいません。

（１） 最後の列は定数項を表しているので，未知数の数は２個。それらを x, y とし，行列を見ながら方程式をつくると

$$\begin{cases} 1\cdot x+2\cdot y=-5 \\ 3\cdot x-4\cdot y=\ \ 6 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x+2y=-5 \\ 3x-4y=\ \ 6 \end{cases}$$

（２） 最後の列は定数項なので，未知数の数は３個。それらを x, y, z とし，行列を見ながら方程式をつくると

$$\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y+0\cdot z=-2 \\ 0\cdot x+5\cdot y-1\cdot z=\ \ 0 \\ 3\cdot x+0\cdot y+2\cdot z=\ \ 1 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 2x+3y \qquad =-2 \\ \qquad 5y-\ z=\ \ 0 \\ 3x \qquad +2z=\ \ 1 \end{cases}$$

（解終）

問題 1.3 （解答は p. 154）

次の行列 C, D はそれぞれ連立１次方程式の係数行列で，最後の列は定数項を表しています。もとの連立１次方程式をつくってください。

（１） $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ （２） $D=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

〈3〉 行基本変形

ここでは連立１次方程式を行列を使って解くことを考えてみましょう。

はじめに，連立１次方程式の解を求める過程を，**同値な式の変形**ととらえてみます。ここでいう“同値な式の変形”とは，逆の方向にももどれる変形のことです。たとえば

$$\begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ 3x-y=7 & ② \end{cases} \overset{①+②}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} 5x=10 \quad ③$$

のように，左側の式の組から y を消去するために①＋②という計算を行って③を出しますが，③から①や②は導けません。つまりこの変形は同値な式の変形ではありません。次のように，どちらかの式を残しておくと同値な式の変形となります。

$$\begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ 3x-y=7 & ② \end{cases} \underset{②'-①'}{\overset{①+②}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+y=\ 3 & ①' \\ 5x\qquad=10 & ②'=①+② \end{cases}$$

この“同値な式の変形”（$\Longleftrightarrow$ で示す）により上の連立１次方程式を解いてみましょう。（式番号は，常に第１式を①，第２式を②で表示しておきます。）

$$ⓐ\ \begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ 3x-y=7 & ② \end{cases} \underset{②-①}{\overset{②+①}{\rightleftarrows}} ⓑ\ \begin{cases} 2x+y=\ 3 & ① \\ 5x\qquad=10 & ② \end{cases}$$

$$\underset{②\times 5}{\overset{②\times\frac{1}{5}}{\rightleftarrows}} ⓒ\ \begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ \ x\qquad=2 & ② \end{cases}$$

$$\underset{②\times\frac{1}{2}}{\overset{②\times 2}{\rightleftarrows}} ⓓ\ \begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ 2x\qquad=4 & ② \end{cases}$$

$$\underset{①+②}{\overset{①-②}{\rightleftarrows}} ⓔ\ \begin{cases} \qquad y=-1 & ① \\ 2x\quad=\ \ 4 & ② \end{cases}$$

$$\underset{②\times 2}{\overset{②\times\frac{1}{2}}{\rightleftarrows}} ⓕ\ \begin{cases} \qquad y=-1 & ① \\ \ x\quad=\ \ 2 & ② \end{cases}$$

$$\underset{\text{入れかえ}}{\overset{\text{入れかえ}}{\rightleftarrows}} ⓖ\ \begin{cases} x\quad=\ \ 2 \\ \qquad y=-1 \end{cases}$$

ここで使われている変形は

Ⅰ．　ある式を k 倍（$k\neq 0$）する

Ⅱ$'$．　ある式に他の式を加えたり引いたりする

Ⅲ．　式を入れかえる

の３つです。しかし上記の変形の途中，ⓒで x の値がせっかく求まっているのに $2x$ を消去するためにⓓ,ⓔではそれを２倍していて少

し効率が悪くなっています。そこでII′ の代わりに I とII′ を同時に行う

　　II．　ある式に他の式を k 倍して加える

という変形を使います。

　連立 1 次方程式の同値な式の変形をまとめておきましょう。

連立 1 次方程式の同値な式の変形

I．　ある式を k 倍（$k \neq 0$）する。
II．　ある式に他の式を k 倍して加える。
III．　式を入れかえる。

　上の同値な式の変形を使って改めて解くと，

$$\begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ 3x-y=7 & ② \end{cases} \underset{\text{II．②+①×}(-1)}{\overset{\text{II．②+①×1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+y=\ \ 3 & ① \\ 5x\ \ \ \ \ =10 & ② \end{cases}$$

$$\underset{\text{I．②×5}}{\overset{\text{I．②×}\frac{1}{5}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+y=3 & ① \\ x\ \ \ \ \ =2 & ② \end{cases}$$

$$\underset{\text{II．①+②×2}}{\overset{\text{II．①+②×}(-2)}{\rightleftarrows}} \begin{cases} y=-1 & ① \\ x\ \ \ =\ \ 2 & ② \end{cases}$$

$$\underset{\text{III．入れかえ}}{\overset{\text{III．入れかえ}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x\ \ \ =\ \ 2 & ① \\ y=-1 & ② \end{cases}$$

となり，先ほどよりすっきりしました。

　この変形を行列を使って表してみましょう。係数だけをとり出して（　）でくくればよいだけです。一番右の列は定数項なので | を入れて区別しておくことにします。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \rightleftarrows \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\rightleftarrows \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightleftarrows \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightleftarrows \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

これが行列を使った連立 1 次方程式の解法です。

　使った同値な式の変形を行列の言葉に直しておきましょう。この 3 つの変形を**行列の行基本変形**といいます。

行列の行基本変形

I．　ある行を k 倍（$k \neq 0$）する。
II．　ある行に他の行を k 倍して加える。
III．　行を入れかえる。

行ごとに変形です。
行ごとの変形は式の変形を意味しています。

例題 1.4 [行基本変形 1]

次の行列に(1),(2),(3)の行基本変形を順に続けて行ってみましょう。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　第2行を $\frac{1}{2}$ 倍する（変形Ⅰ）。

(2)　第2行に第1行を2倍して加える（変形Ⅱ）。

(3)　第1行と第2行を入れかえる（変形Ⅲ）。

・ちょっと解説・

ⓘ,ⓙは行番号を表します。

行基本変形は略して次のように表記することとします。

Ⅰ．ⓘ$\times k$　… 第 i 行を k 倍 $(k \neq 0)$ する。

Ⅱ．ⓘ$+$ⓙ$\times k$　… 第 i 行に第 j 行を k 倍して加える。

Ⅲ．ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ　… 第 i 行と第 j 行を入れかえる。

また，変形前の行列と変形後の行列は異なった行列なので「→」を使って変形していきます。「＝」は行列として等しいことを意味しているので，行基本変形には使えません。

解　行列を順に続けて変形していきましょう。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)\ ②\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6\times\frac{1}{2} & -4\times\frac{1}{2} & 0\times\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{(2)\ ②+①\times 2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3+(-2)\times 2 & -2+1\times 2 & 0+3\times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{(3)\ ①\leftrightarrow②} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

（解終）

問題 1.4 （解答は p. 154）

次の行列に(1),(2),(3)の行基本変形を順に続けて行ってください。また，変形の → の上には，どのような変形を行ったかを記しておいてください。

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　第1行を $\frac{1}{3}$ 倍する（変形Ⅰ）。

(2)　第2行に第1行を4倍して加える（変形Ⅱ）。

(3)　第1行と第2行を入れかえる（変形Ⅲ）。