共立講座 数学の輝き

7

確率微分方程式

谷口 説男 著

新井 仁之・小林 俊行・斎藤 毅・吉田 朋広 編

共立出版

7

確率微分方程式

谷口 説男 著

新井 仁之・小林 俊行・斎藤 毅・吉田 朋広 編

共立講座 数学の輝き

共立出版

刊行にあたって

数学の歴史は人類の知性の歴史とともにはじまり，その蓄積には膨大なものがあります．その一方で，数学は現在もとどまることなく発展し続け，その適用範囲を広げながら，内容を深化させています．「数学探検」，「数学の魅力」，「数学の輝き」の 3 部からなる本講座で，興味や準備に応じて，数学の現時点での諸相をぜひじっくりと味わってください．

数学には果てしない広がりがあり，一つ一つのテーマも奥深いものです．本講座では，多彩な話題をカバーし，それでいて体系的にもしっかりとしたものを，豪華な執筆陣に書いていただきます．十分な時間をかけてそれをゆったりと満喫し，現在の数学の姿，世界をお楽しみください．

「数学の輝き」

数学の最前線ではどのような研究が行われているのでしょうか？ 大学院にはいっても，すぐに最先端の研究をはじめられるわけではありません．この第 3 部では，第 2 部の「数学の魅力」で身につけた数学力で，それぞれの専門分野の基礎概念を学んでください．一歩一歩読み進めていけばいつのまにか視界が開け，数学の世界の広がりと奥深さに目を奪われることでしょう．現在活発に研究が進みまだ定番となる教科書がないような分野も多数とりあげ，初学者が無理なく理解できるように基本的な概念や方法を紹介し，最先端の研究へと導きます．

編集委員

はじめに

確率微分方程式は，ランダムな揺らぎを持つニュートン方程式である．ニュートンの運動方程式は物体の運動もしくは状態の変化を常微分方程式として記述するものであるが，その常微分方程式にランダムな揺らぎが加わったものが確率微分方程式である．

たとえばコップの水に落ちた一滴の墨汁が拡がっていく様子を思い描いてほしい．羽を広げるように墨が拡がっていく現象の背後には以下に述べるようにランダムに動いている墨粒子のダイナミクスが隠れている．大きな粒の墨粒子 (0.08 ～ 0.3 マイクロメートル) は，熱運動する小さな粒の水粒子 (0.38 ナノメートル) にあらゆる方向から不規則にに突き当たられ，その結果てんでバラバラにジグザグに位置を変えていく．墨の色の濃淡はその付近にどの程度多くの墨粒子があるかという局所的な総和 (積分量) で定まり，墨粒子のランダムな動きが集結して墨汁の拡がっていく濃淡を生み出している．濃淡を決めるそれぞれの墨粒子のジグザグな動きは，引力による自然落下に水粒子が与えるランダムな揺らぎを加えた常微分方程式，すなわち確率微分方程式によって記述される．

確率微分方程式は，「全国紙上数学談話会」という謄写版刷りの週刊小冊子に 1942 年に発表された「マルコフ過程ヲ定メル微分方程式」という伊藤清の論文で初めて導入された．水面上に浮かぶ粒子が水粒子とのランダムな衝突によりジグザグな経路を描きながら動いていく現象は，発見した植物学者ロバート・ブラウンにちなんでブラウン運動と呼ばれている．伊藤はブラウン運動の微小時間変動に基づく積分を創始し，微積分学の基本定理に基づく実変数の微分方程式と積分方程式の対応にならい，確率微分方程式を確率積分に基づく積分方程式として定式化した．今日，伊藤が創始した確率積分，確率微分方程式に関連する解析学は伊藤解析と呼ばれており，1970 年代後半に生み出された

マリアヴァン解析とともに確率解析と呼ばれる分野の中核をなしている．

本書の第 1 章から第 3 章までは，多くの教科書で触れられている準備的な事実について解説する．本書では，抽象的な枠組みで理論体系を展開するのではなく，基本的かつ標準的な事実と後の章で必要となる事実を，できる限り平易な手法で直接的に紹介するように努めた．たとえば，条件つき期待値は [17] にならい，ラドン-ニコディムの定理を用いることなく導入し，マルチンゲールの 2 次変動過程の存在も一般論であるドゥーブ-メイエーの分解定理を用いるのではなく [14] のように連続マルチンゲールと停止時刻の組み合わせによる手法により示す．

第 4 章で確率積分を定義し，その性質と応用について解説する．多くの教科書では，まず L^2-理論の枠組みで確率積分を定義し，その後停止時刻を用いて一般の被積分関数に拡張するという手法が用いられる．本書ではこの手法をとらず，[11] にならい一般の被積分関数に対する確率積分を直接導入する．この方が確率積分の収束を語るのに適した弱い収束である確率収束を定義の段階から組み込めるからである．このような直接的な導入が可能となるのは，本書では一般的なマルチンゲールではなくブラウン運動に関する確率積分に考察対象を絞ったことによる．数理ファイナンスのモデリングにおいてマルチンゲールに対する確率積分が重要となるが，ランダムなダイナミクスとして確率微分方程式を考察する本質はブラウン運動に関する確率積分で尽きている．

第 5，6 章では，確率微分方程式の解と応用について解説する．第 5 章では，指数写像による解の近似，初期値に関する 1-パラメーター変換群としての解の性質など，確率微分方程式の常微分方程式的な側面，すなわちランダムなニュートン方程式としての側面を見る．この応用として，マルコフ性，強マルコフ性と呼ばれる過去と未来の独立性に関する重要な確率過程の性質が，1-パラメーター変換群としての性質と深く結びついていることを明らかにする．第 6 章では，熱の拡散を記述する偏微分方程式である熱方程式やディリクレ問題などの偏微分方程式論への応用について解説する．

第 7，8 章では，第 6 章とは別の確率微分方程式の応用について述べる．第 7 章では，確率微分方程式を用いた経路空間（半直線 $[0,\infty)$ 上の連続関数の空間）での初等的な微積分学について解説する．考察するのは，一つは経路空間

上の変数変換公式であり，もう一つは部分積分公式である．どちらもマリアヴァン解析を援用することでより一般の形で述べることができる結果であるが，本書では確率微分方程式の立場からの考察について述べる．とくに部分積分公式の導出は，マリアヴァン解析における微分法とは異なる確率微分方程式に固有の手法を利用しており，それ自身興味深いものである．第 8 章では，確率解析の一大応用分野である数理ファイナンスに関連して，初等的な市場モデルであるブラック-ショールズ・モデルについて解説する．

本書は第 1 章の確率論の復習と 2，3 箇所を除き，自己完結的にすべての事実に証明を付けている．他書を参照する必要があるときは，そこに挙げた参照文献をたどれば必要な事実が分かるようにしているので，読者自ら確認していただきたい．

吉田朋広先生に本書の執筆の機会を与えていただいた．ここに記して厚く謝意を表します．また，2014 年 3 月の初校脱稿後，丁寧な査読と貴重な提案をいただいた査読者にも深く感謝いたします．

2016 年 8 月

谷口説男

目　次

記号表

- $A \overset{\text{def}}{=} B$：$A$ を B で定義する
- $\mathbb{N}$：自然数の全体，$\mathbb{Z}$：整数の全体，$\mathbb{R}$：実数の全体，$\mathbb{C}$：複素数の全体，$\mathbb{Z}_+$：非負整数の全体，i：虚数単位 $(\mathrm{i}^2 = -1)$
- $a \wedge b = \min\{a, b\}$，$a \vee b = \max\{a, b\}$, $a^+ = a \vee 0$，$a^- = a \wedge 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$
- $[a] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leqq a\}$，$[a) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n < a\}$，$[a)_n = [2^n a)2^{-n}$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$
- $\mathbb{R}^{n \times m}$：$n \times m$-行列の全体，$A^\dagger$：$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の転置行列
- $\mathbf{1}_A$：集合 A の定義関数; $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$
- $C^n(\mathbb{R}^N)$：$\mathbb{R}^N$ 上の n 回連続的微分可能な実数値関数の全体 $(n = 0, 1, \dots)$
- $C^\infty(\mathbb{R}^N)$：$\mathbb{R}^N$ 上の無限回連続的微分可能な実数値関数の全体
- $C_b(\mathbb{R}^N)$：$\mathbb{R}^N$ 上の有界連続実数値関数の全体
- $C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$：すべての偏導関数が有界な $C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$ の元の全体
- $C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \overset{\text{def}}{=} \{f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \mid f_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)(1 \leqq i \leqq N)\}$
- $C_0^n(\mathbb{R}^N)$：コンパクトな台を持つ $C^n(\mathbb{R}^N)$ の元の全体 $(n = 0, 1, \dots)$
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$：コンパクトな台を持つ $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の元の全体
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \overset{\text{def}}{=} \{f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \mid f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)(1 \leqq i \leqq N)\}$
- $C_\nearrow(\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 上の高々多項式増大な連続関数の全体
- $C_\nearrow^\infty(\mathbb{R}^N)$：$\mathbb{R}^N$ 上のすべての導関数まで込めて高々多項式増大である無限回連続的微分可能な実数値関数の全体
- $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{G} \in \Lambda} \mathcal{G}$．ただし，$\Lambda = \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G}$ は σ-加法族で $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}\}$
- $\mathcal{B}(E)$：位相空間 E のボレル σ-加法族
- $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(A) = 0\}$

各種文字の字体

1. アルファベット

1		2		3		4	5	6
A	a	A	a	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathcal{A}$	$\mathbb{A}$	$\mathscr{A}$
B	b	B	b	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	$\mathcal{B}$	$\mathbb{B}$	$\mathscr{B}$
C	c	C	c	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	$\mathcal{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathscr{C}$
D	d	D	d	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	$\mathcal{D}$	$\mathbb{D}$	$\mathscr{D}$
E	e	E	e	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	$\mathcal{E}$	$\mathbb{E}$	$\mathscr{E}$
F	f	F	f	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	$\mathcal{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathscr{F}$
G	g	G	g	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	$\mathcal{G}$	$\mathbb{G}$	$\mathscr{G}$
H	h	H	h	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	$\mathcal{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathscr{H}$
I	i	I	i	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	$\mathcal{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathscr{I}$
J	j	J	j	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	$\mathcal{J}$	$\mathbb{J}$	$\mathscr{J}$
K	k	K	k	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	$\mathcal{K}$	$\mathbb{K}$	$\mathscr{K}$
L	l	L	l	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	$\mathcal{L}$	$\mathbb{L}$	$\mathscr{L}$
M	m	M	m	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	$\mathcal{M}$	$\mathbb{M}$	$\mathscr{M}$
N	n	N	n	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	$\mathcal{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathscr{N}$
O	o	O	o	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	$\mathcal{O}$	$\mathbb{O}$	$\mathscr{O}$
P	p	P	p	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	$\mathcal{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathscr{P}$
Q	q	Q	q	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathscr{Q}$
R	r	R	r	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	$\mathcal{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathscr{R}$
S	s	S	s	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	$\mathcal{S}$	$\mathbb{S}$	$\mathscr{S}$
T	t	T	t	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	$\mathcal{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathscr{T}$
U	u	U	u	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	$\mathcal{U}$	$\mathbb{U}$	$\mathscr{U}$
V	v	V	v	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	$\mathcal{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathscr{V}$
W	w	W	w	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	$\mathcal{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathscr{W}$
X	x	X	x	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	$\mathcal{X}$	$\mathbb{X}$	$\mathscr{X}$
Y	y	Y	y	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	$\mathcal{Y}$	$\mathbb{Y}$	$\mathscr{Y}$
Z	z	Z	z	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathscr{Z}$

1. ローマン体	2. イタリック体
3. ドイツ文字	4. 筆記体
5. 黒板太字	6. 花文字

2. ギリシャ文字

		読みの例
A	α	アルファ
B	β	ベータ
Γ	γ	ガンマ
Δ	δ	デルタ
E	$\epsilon,(\varepsilon)$	イプシロン
Z	ζ	ゼータ
H	η	イータ
Θ	$\theta,(\vartheta)$	シータ
I	ι	イオタ
K	κ	カッパ
Λ	λ	ラムダ
M	μ	ミュー
N	ν	ニュー
Ξ	ξ	グザイ
O	o	オミクロン
Π	$\pi,(\varpi)$	パイ
P	$\rho,(\varrho)$	ロー
Σ	$\sigma,(\varsigma)$	シグマ
T	τ	タウ
Υ	υ	ウプシロン
Φ	$\phi,(\varphi)$	ファイ
X	χ	カイ
Ψ	ψ	プサイ
Ω	ω	オメガ

第 1 章 ◇ 確率論の基本概念

確率空間について復習した後，本書で行う考察で基本的な概念である一様可積分性，様々な収束および条件つき期待値とそれらの性質について紹介する．

1.1 確率空間

本節では，確率論の基本的な用語と概念について振り返る．証明はほとんどつけないので，詳しくは [1, 6, 9] 等を参照されたい．

1.1.1 可測空間

集合 Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が **σ-加法族** (σ-field) であるとは，次の 3 条件をみたすことをいう．

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ である．
(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば，$\Omega \setminus A \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$ である．
(iii) $A_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \dots)$ ならば，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ である．

集合 Ω と σ-加法族 $\mathcal{F}$ の組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間** (measurable space) という．

例 1.1 Ω の部分集合の全体 2^{Ω} と $\{\emptyset, \Omega\}$ はともに σ-加法族である．また，$A \subset \Omega$ に対し，$\{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ もまた σ-加法族である．

$\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ に対し，$\Lambda(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ を包含する σ-加法族の全体とし，

$$\sigma(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\mathcal{G} \in \Lambda(\mathcal{A})} \mathcal{G}$$

とおけば，$\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む，包含関係に関する最小の σ-加法族である．これを $\mathcal{A}$ が**生成する** σ-加法族 (σ-field generated by $\mathcal{A}$) という．

Ω が位相空間のとき，Ω の開集合の全体 $\mathcal{O}$ が生成する σ-加法族 $\sigma(\mathcal{O})$ を**ボレル σ-加法族** (Borel σ-field) といい，$\mathcal{B}(\Omega)$ と表す.

例 1.2　半開区間の直積集合 $\prod_{i=1}^N [a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^N$ $(a_i < b_i\ (i = 1, \ldots, N))$ の全体を $\mathcal{A}$ とする．任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$G = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ となる $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ が存在するので，$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ となる.

二つの可測空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し，直積集合 $A_1 \times A_2$ $(A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2)$ の全体が生成する，直積空間 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の σ-加法族を $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ と表し**直積 σ-加法族** (product σ-field) という.

1.1.2　確率空間

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．関数 $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ が 2 条件

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

(ii) $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が互いに交わらない，すなわち，$i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ をみたすならば，次が成り立つ:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mathbf{P}(A_i)$$

をみたすとき，**確率測度** (probability measure) という．三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を**確率空間** (probability space) という．上の (ii) をみたす $\mathbf{P}$ は，**σ-加法的である** (σ-additive) といわれる.

注意 1.3　(1) 上の (ii) ですべての $A_i = \emptyset$ とおけば，$\mathbf{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^\infty \mathbf{P}(\emptyset)$ となる．これより，$\mathbf{P}(\emptyset) \in [0, 1]$ という条件とあわせると，$\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ を得る.
(2) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ を用いると，σ-加法性から有限加法性と呼ばれる次の性質が従う: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ が互いに交わらないならば，次が成り立つ.

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i).$$

定理 1.4

(1) $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \subset B$ をみたすとき，$\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ が成り立

つ．とくに，$\mathbf{P}(A) \leqq \mathbf{P}(B)$ となる．

(2) $A_i \subset A_{i+1}$ をみたす $A_i \in \mathcal{F}$ $(i=1,2,\dots)$ に対し，$\mathbf{P}\bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigr) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i)$ が成り立つ．

(3) $A_i \supset A_{i+1}$ をみたす $A_i \in \mathcal{F}$ $(i=1,2,\dots)$ に対し，$\mathbf{P}\bigl(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\bigr) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i)$ が成り立つ．

例 1.5　(1) サイコロ投げは，集合 $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ と σ-加法族 2^{Ω_1} からなる可測空間 $(\Omega_1, 2^{\Omega_1})$ によりモデル化される．公平なサイコロは，$\mathbf{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ $(i=1,\dots,6)$ という確率測度に対応しており，$\mathbf{P}(\{i\}) \neq \frac{1}{6}$ となる i が存在するならば，不公平なサイコロである．

サイコロを 2 回投げるモデルは，集合 $\Omega_2 = \{(i,j) \,|\, i,j = 1,\dots,6\}$ と σ-加法族 2^{Ω_2} により実現される．公平なサイコロは，$\mathbf{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ $(i,j=1,\dots,6)$ という確率測度に対応しており，$\mathbf{P}(\{(i,j)\}) \neq \frac{1}{36}$ となる (i,j) が存在するならば，不公平なサイコロである．

(2) $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ とする．$p_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ となる p_i $(i=1,2,\dots)$ をとる．

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbf{1}_A(i) \quad (A \in \mathcal{F})$$

とおく．ただし，$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & (i \in A) \\ 0 & (i \notin A) \end{cases}$ である．このとき，$\mathbf{P}$ は確率測度である．証明は演習問題とする．

1.1.3　確率変数

以下，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ において考察を行う．$A \in \mathcal{F}$ は事象と呼ばれる．すべての事象は「サイコロの出目が偶数である」というように，Ω 上の関数に対する条件により特徴付けられ，確率論の考察の主たる対象はこのような関数である．

$(E, \mathcal{E})$ を可測空間とする．関数 $X : \Omega \mapsto E$ が **$\mathcal{F}$-可測** ($\mathcal{F}$-measurable) であるとは，

$$X^{-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \quad (\forall A \in \mathcal{E})$$

が成り立つことをいう．$\mathcal{F}$-可測な $X : \Omega \to E$ を，**E-値確率変数** (E-valued random variable) という．E が位相空間のときは $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$ とし，σ-加法族を明記することなく E-値確率変数という用語をもちいる．とくに $E=\mathbb{R}$ のときは，簡単に**確率変数** (random variable) という．

本書では，$X^{-1}(A)$ を $\{X\in A\}$ とも表す．その確率 $\mathbf{P}(\{X\in A\})$ を $\{,\}$ を略して $\mathbf{P}(X\in A)$ と書く．確率変数 X に対し，$\mathbf{P}(X\in[a,b])$ を $\mathbf{P}(a\leqq X\leqq b)$ と書くこともある．

例 1.6　例 1.5 のサイコロ 2 回投げのモデルに対し，$X_1((i,j))=i, X_2((i,j))=j$ $(i,j=1,\ldots,6)$ と定義すれば，それぞれ，1 回目，2 回目に出た目を表す確率変数となる．

X を E-値確率変数とし，$\mathbf{Q}:\mathcal{E}\to[0,1]$ を

$$\mathbf{Q}(A)=\mathbf{P}(X^{-1}(A))\quad(A\in\mathcal{E})$$

と定義すれば，$\mathbf{Q}$ は $(E,\mathcal{E})$ 上の確率測度である．この $\mathbf{Q}$ を X の**確率分布** (probability distribution) といい，$\mathbf{P}\circ X^{-1}$ と表す．

例 1.7　$\mathbf{P}$ を $((0,1),\mathcal{B}((0,1)))$ 上のルベーグ測度とする．確率変数 $X:(0,1)\to\mathbb{R}$ を $X(\omega)=\tan((\omega-\frac{1}{2})\pi)$ と定義する．このとき，$\mathbf{P}\circ X^{-1}$ は $\mathbf{P}\circ X^{-1}((-\infty,a])=\frac{1}{\pi}\arctan a+\frac{1}{2}$ をみたす $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度である．

1.1.4　期待値

確率変数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ の**期待値** (expectation) $\mathbf{E}[X]$ を次の手順で定義する:

(i) $a_i\in\mathbb{R}, A_i\in\mathcal{F}$ $(i=1,\ldots,n)$ を用いて $X=\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{1}_{A_i}$ と表される確率変数の全体を $\mathcal{SF}$ と表す．$X\in\mathcal{SF}$ に対し，$\mathbf{E}[X]$ を次で定める．

$$\mathbf{E}[X]\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{P}(A_i).$$

(ii) $X\geqq 0$ のとき，$\mathbf{E}[X]$ を次で定義する．

$$\mathbf{E}[X]\overset{\text{def}}{=}\sup\{\mathbf{E}[Y]\,|\,Y\in\mathcal{SF},0\leqq Y\leqq X\}.$$

(iii) $\min\{\mathbf{E}[X^+],\mathbf{E}[X^-]\}<\infty$ となる X に対し，

$$\mathbf{E}[X]\overset{\text{def}}{=}\mathbf{E}[X^+]-\mathbf{E}[X^-]$$

と定める．ただし，$X^{\pm}$ は次のように定義する:

$$X^{+}(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^{-}(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\} \quad (\omega \in \Omega).$$

(ii) においては，$\mathbf{E}[X] = \infty$ となる場合がある．このため (iii) においては，$\infty -$（有限値）$= \infty$,（有限値）$- \infty = -\infty$ と拡張して定義している．

$\mathbf{E}[|X|] < \infty$ となるとき，X は**可積分** (integrable) であるといい，可積分な X の全体を $L^1(\mathbf{P})$ と表す．$p > 0$ に対し，$|X|^p$ が可積分であるとき，X は **p-乗可積分** (p-th integrable) であるといい，これらの全体を $L^p(\mathbf{P})$ と表す．$X \in L^p(\mathbf{P})$ に対し，

$$\|X\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\mathbf{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく．また，$X \in L^1(\mathbf{P}), A \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\mathbf{E}[X; A] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{E}[X\mathbf{1}_A]$$

と記す．

$(E, \mathcal{E})$ を可測空間とし，X を E-値確率変数とする．X の確率分布に関する期待値について次が成り立つ．

定理 1.8　$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \circ X^{-1}$ に関する期待値を $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$ と書く．$(E, \mathcal{E})$ 上の確率変数 f に対し，$f \in L^1(\mathbf{Q})$ であることと $f \circ X \in L^1(\mathbf{P})$ となることは同値である．さらにこのとき，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] = \mathbf{E}[f \circ X]$ が成り立つ．

例 1.9　Ω は有限集合とし，確率空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbf{P})$ を考える．このとき，関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ はすべて確率変数である．$X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ と表現できるから，$X \in \mathcal{SF}$ であり，

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$$

となる．

さらに，$\{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とし，$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{\{X = x_i\}}$ と表現すれば，

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$$

という，よく知った期待値の定義が出現する．さらにこの右辺は $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ の X の確率分布に関する期待値 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}\circ X^{-1}}[f]$ に他ならない．

期待値は以下に述べる定理 1.10 から定理 1.13 に挙げる性質をもっている．

定理 1.10　$X, Y \in L^1(\mathbf{P}), a, b \in \mathbb{R}$ とする．

(1) （線形性）$aX + bY \in L^1(\mathbf{P})$ であり，さらに次が成り立つ:

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

(2) （正値性）$X \geqq Y$ ならば，$\mathbf{E}[X] \geqq \mathbf{E}[Y]$ となる．さらに，等号が成り立つのは，$\mathbf{P}(X = Y) = 1$ となるときであり，そのときに限る．

(3) （イェンセン (Jensen) の不等式）$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が下に凸な関数であり，$f(X) \in L^1(\mathbf{P})$ をみたすならば，不等式

$$f(\mathbf{E}[X]) \leqq \mathbf{E}[f(X)]$$

が成り立つ．とくに，$p \geqq 1$ に対し $X \in L^p(\mathbf{P})$ ならば，次が成り立つ:

$$|\mathbf{E}[X]|^p \leqq \mathbf{E}[|X|^p].$$

命題 $A(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ が $\mathbf{P}$-零集合を除いて成り立つとき，すなわち，$\mathbf{P}(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ が存在し，$\omega \notin N$ ならば $A(\omega)$ が真となるとき，A はほとんど確実に成り立つといい，「A，$\mathbf{P}$-a.s.」と表す．例えば，上の定理 (2) の条件 $\mathbf{P}(X = Y) = 1$ は，「$X = Y$，$\mathbf{P}$-a.s.」とも書くことができる．

注意 1.11　上の「$\mathbf{P}$-a.s.」の定義においては，$\{\omega \in \Omega \mid A(\omega)$ が成り立つ $\}$ という集合が $\mathcal{F}$ に属することは仮定していない．したがって，「A，$\mathbf{P}$-a.s.」であっても，$\mathbf{P}$（A が成り立つ）$= 1$ とは書けない場合もある．

以下の考察において期待値と極限の交換がしばしば必要となるが，次のような順序交換に関する十分条件が知られている．

定理 1.12　$X_n \in L^1(\mathbf{P})$ $(n=1,2,\dots)$ とする．

(1)（単調収束定理）$X_n \leqq X_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$，$\mathbf{P}$-a.s. ならば，次が成り立つ．[1)]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}\Big[\lim_{n\to\infty} X_n\Big]. \tag{1.1}$$

(2)（ファトウ (Fatou) の補題）$X_n \geqq 0$，$\mathbf{P}$-a.s. $(n=1,2,\dots)$ ならば，次が成り立つ．

$$\mathbf{E}\Big[\liminf_{n\to\infty} X_n\Big] \leqq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n]$$

(3)（優収束定理）$Y \geqq 0$ なる $Y \in L^1(\mathbf{P})$ が存在し，$|X_n| \leqq Y$，$\mathbf{P}$-a.s. $(n=1,2,\dots)$ が成り立ち，さらに，$\lim_{n\to\infty} X_n$ が $\mathbf{P}$-a.s. に存在すると仮定する．このとき，(1.1) が成り立つ．

(4)（有界収束定理）定数 $K \geqq 0$ が存在し，$|X_n| \leqq K$，$\mathbf{P}$-a.s. $(n=1,2,\dots)$ が成り立ち，さらに，$\lim_{n\to\infty} X_n$ が $\mathbf{P}$-a.s. に存在すると仮定する．このとき，(1.1) が成り立つ．

期待値に関する評価式の考察で基本的となる性質を次に挙げる．

定理 1.13

(1) $p>0, X_n \in L^p(\mathbf{P})$ $(n=1,2,\dots)$ が，$\lim_{n,m\to\infty} \|X_n - X_m\|_p = 0$ をみたすならば，$\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\|_p = 0$ となる $X \in L^p(\mathbf{P})$ が存在する．

(2)（チェビシェフ (Chebyshev) の不等式）$X \in L^p(\mathbf{P})$ ならば，

$$\mathbf{P}(|X| \geqq \lambda) \leqq \frac{1}{\lambda^p}\mathbf{E}[|X|^p] \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成り立つ．

(3)（ヘルダー (Hölder) の不等式） $p>1$ とし，$q>1$ を $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ により定

[1)] $\mathbf{P}(N)=0$ なる $N \in \mathcal{F}$ が存在し，$\omega \notin N$ ならば $X_n(\omega) \leqq X_{n+1}(\omega)$ $(n=1,2,\dots)$ となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} X_n$ は $\mathbf{P}$-a.s. に存在する．(1.1) における $\lim_{n\to\infty} X_n$ は，$\omega \notin N$ のときは $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ と定義し，$\omega \in N$ のときは 0 と定義する．

義する．このとき，$X \in L^p(\mathbf{P}), Y \in L^q(\mathbf{P})$ に対し，$XY \in L^1(\mathbf{P})$ であり，$\|XY\|_1 \leqq \|X\|_p\|Y\|_q$ が成り立つ．

(4) （ミンコフスキー (Minkowski) の不等式）$p \geqq 1$，$X, Y \in L^p(\mathbf{P})$ とする．このとき，$X + Y \in L^p(\mathbf{P})$ であり，$\|X+Y\|_p \leqq \|X\|_p + \|Y\|_p$ が成り立つ．

ヘルダーの不等式から従う

$$\|X\|_{p'} \leqq \|X\|_p \quad (1 \leqq p' < p, X \in L^p(\mathbf{P})) \tag{1.2}$$

という不等式は有用である．また，$p = 2$ に対する $\|XY\|_1 \leqq \|X\|_2\|Y\|_2$ という不等式はシュワルツ (Schwarz) の不等式として知られている．

例 1.14　$\Omega = [0,T], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,T]), \mathbf{P}(A) = \frac{A\text{ のルベーグ測度}}{T}$ とする．さらに $p \geqq 1$ とする．このとき，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上のヘルダーの不等式から，つぎの評価式が得られる:

$$\left|\int_0^T f(t)dt\right|^p \leqq T^{p-1}\int_0^T |f(t)|^p dt \quad (f \in L^p(\mathbf{P})).$$

この不等式は 4 章以降しばしば利用される．

1.1.5　特性関数

$\mathbb{R}^N$-値確率変数 $X = (X^1, \ldots, X^N)$ の**特性関数** (characteristic function) $\varphi_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_X(\xi) = \mathbf{E}[e^{\mathrm{i}\langle X, \xi\rangle}] \quad (\xi \in \mathbb{R}^N)$$

と定義する．ただし，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^N$ の内積，すなわち，

$$\langle \xi, \eta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \xi^i\eta^i \quad (\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^N), \eta = (\eta^1, \ldots, \eta^N) \in \mathbb{R}^N)$$

である．さらに，確率変数 Y, Z に対し，$\mathbf{E}[Y + \mathrm{i}Z] = \mathbf{E}[Y] + \mathrm{i}\mathbf{E}[Z]$ と定義した．次のように，特性関数により X の分布関数は一意的に定まる．

定理 1.15　X, Y を $\mathbb{R}^N$-値確率変数とする．もし X と Y の特性関数が一致すれば，すなわち，$\varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi)$ $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$ が成り立てば，X と Y の確率分布は一致する．

証明　急減少関数のフーリエ変換（付録 A.1 節参照）を利用し証明する．

$\varphi_X = \varphi_Y$ が成り立つと仮定する．$\mu_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}, \mu_Y = \mathbf{P} \circ Y^{-1}$ とおく．定理 1.8 により，次が成り立つ:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mu_X(dx) = \varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mu_Y(dx) \quad (\xi \in \mathbb{R}^N). \tag{1.3}$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする．定理 A.1 により，

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

となる $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ が存在する．フビニの定理と (1.3) により，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mu_X(dx) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} d\xi \right) \mu_X(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mu_X(dx) \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mu_Y(dx) \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mu_Y(dx)
\end{aligned}$$

となる．

$$\mathcal{I} = \left\{ \prod_{i=1}^{N} (a_i, b_i) \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leqq b_i, i = 1, \ldots, N \right\}$$

とおく．ただし，$(a, a) = \emptyset$ とする．命題 A.2 と上の考察により，$\mu_X(A) = \mu_Y(A)$ $(\forall A \in \mathcal{I})$ となる．$\mathcal{I}$ は乗法族であり，$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ となるから，定理 A.5 により，$\mu_X = \mu_Y$，すなわち $\mathbf{P} \circ X^{-1} = \mathbf{P} \circ Y^{-1}$ となる．　■

注意 1.16　この定理は，レヴィの反転公式と呼ばれるフーリエ変換の反転公式を利用して証明されることが多い．

1.1.6　独立

次章以降の考察において重要となる独立の定義を列挙しよう．

(i) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ が**独立** (independent) であるとは，任意の $m \leqq n$ と $1 \leqq i_1 < \cdots < i_m \leqq n$ に対し，次が成り立つことをいう．

$$P\Bigl(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\Bigr) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{i_j}).$$

(ii) σ-加法族 $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$ が**独立**であるとは，任意の $A_1, \ldots, A_n$ ($A_i \in \mathcal{G}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$) が独立となることをいう．

(iii) $\mathbb{R}^N$-値確率変数 X に対し，X の生成する σ-加法族を

$$\mathcal{F}^X \stackrel{\text{def}}{=} \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$$

と定義する．$N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{N}$ に対し，X_i を $\mathbb{R}^{N_i}$-値確率変数とする $(i = 1, \ldots, n)$．$X_1, \ldots, X_n$ が**独立**であるとは，$\mathcal{F}^{X_1}, \ldots, \mathcal{F}^{X_n}$ が独立であることをいう．

(iv) 確率変数の族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が**独立**であるとは，任意の $n = 1, 2, \ldots$ と $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ に対し，$X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$ が独立となることをいう．

(v) 確率変数の族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と σ-加法族 $\mathcal{G}$ が**独立**であるとは，$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の生成する σ-加法族 $\sigma\bigl(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}^{X_\lambda}\bigr)$ と $\mathcal{G}$ が独立であることをいう．

(vi) $\mathbb{R}^N$-値確率変数 $X = (X^1, \ldots, X^N)$ と σ-加法族 $\mathcal{G}$ が**独立**であるとは，$\{X^1, \ldots, X^N\}$ と $\mathcal{G}$ が**独立**であることをいう．

例 1.17　(1) $\Omega_2, X_1, X_2 : \Omega_2 \to \{1, \ldots, 6\}$ を例 1.6 の通りとする．確率 $\mathbf{P} : 2^{\Omega_2} \to [0, 1]$ を $\mathbf{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$ と定めれば，X_1, X_2 は独立となる．

$\mathbf{P}(\{(i, j)\}) = \begin{cases} \frac{1}{42} & (i \neq j) \\ \frac{1}{21} & (i = j) \end{cases}$ と定義すれば，X_1, X_2 は独立ではない．

(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ とする．任意の $i \neq j$ に対し，A_i と A_j が独立であっても，$A_1, \ldots, A_n$ は独立とは限らない．たとえば，$\mathbf{P}$ を $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ 上のルベーグ測度