[演習問題 4]

4.1　ラグランジュの方程式の応用問題(難)

台車の運動エネルギは，$T_1=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$となる．

振り子の質量 m の座標位置を求めると

$$\left.\begin{aligned} x_m &= l\sin\theta + x \qquad & y_m &= l\cos\theta \\ \dot{x}_m &= l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x} \qquad & \dot{y}_m &= -l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

上式の関係から，質量 m の運動エネルギは

$$T_2=\frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2+\dot{y}_m^2)=\frac{1}{2}m\left\{\left(l\dot{\theta}\cos\theta+\dot{x}\right)^2+\left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right\}$$

運動エネルギの合計は，　$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left\{\left(l\dot{\theta}\cos\theta+\dot{x}\right)^2+\left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right\}$

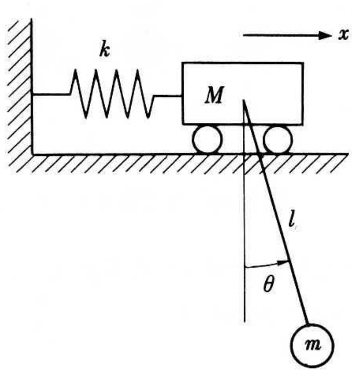
$$=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+\dot{x}^2\right).$$

一方，ばねのポテンシャル・エネルギは，$U_1=\frac{1}{2}kx^2$ であり，振り子の質量mのポテンシャル（位置）エネルギ は，$U_2=mgl(1-\cos\theta)$

となるため，ポテンシャル・エネルギの合計 $U=U_1+U_2=\frac{1}{2}kx^2+mgl\,(1-\cos\theta)$ ．

一般化座標を$q_1=x$，$q_2=\theta$ とおいて，ラグランジュの方程式**(4.24)**の各項を計算する，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=M\dot{x}+m\left(l\dot{\theta}\cos\theta+\dot{x}\right),\ \frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial U}{\partial x}=kx \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=M\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+m\ddot{x} \\ &\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}+ml\dot{x}\cos\theta,\ \frac{\partial T}{\partial \theta}=-ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta,\ \frac{\partial U}{\partial \theta}=mgl\sin\theta \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}\cos\theta-ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

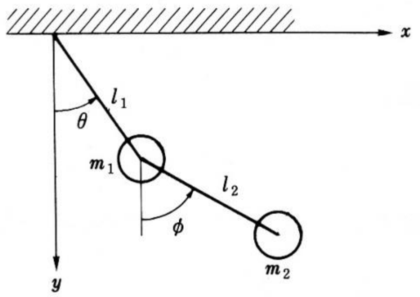


ラグランジュの方程式に代入すると，並進と回転が連成した 2 自由度系の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &M\ddot{x}+m(\ddot{x}+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)+kx=0 \\ &ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}\cos\theta+mgl\sin\theta=0 \ \to\ l\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta=0 \end{aligned}\right\}$$

となる．微小角($\theta\ll1$) と仮定すると，上式を次のように線形化することができる．

$$\left.\begin{aligned} &M\ddot{x}+m(\ddot{x}+l\ddot{\theta})+kx=0 \\ &\ddot{x}+l\ddot{\theta}+g\theta=0 \end{aligned}\right\}$$



4.2　ラグランジュの方程式の応用問題(難)

2 重振り子の 2 つの質量 m_1,m_2のx方向，y方向の座標をそれぞれ (x_1,y_1)，(x_2,y_2)とすると，

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1\sin\theta,\quad y_1 = l_1\cos\theta \\ x_2 &= l_1\sin\theta + l_2\sin\phi,\quad y_2 = l_1\cos\theta + l_2\cos\phi \end{aligned}\right\}$$

系の運動エネルギ:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{l_2^2\dot\phi^2 + 2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi)\right\}$$

ここで

m_1 の速度 $v_1^2 = \dot x_1^2 + \dot y_1^2 = (l_1\cos\theta\cdot\dot\theta)^2 + (-l_1\sin\theta\cdot\dot\theta)^2 = l_1^2\dot\theta^2$

m_2 の速度 $v_1^2 = \dot x_2^2 + \dot y_2^2 = (l_1\cos\theta\cdot\dot\theta + l_2\cos\theta\cdot\dot\phi)^2 + \left(-l_1\sin\theta\cdot\dot\theta - l_2\cos\theta\cdot\dot\phi\right)^2$

$$= m_2\left\{l_1^2\dot\theta^2 + l_2^2\dot\phi^2 + 2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi)\right\}$$

系のポテンシャル(位置)エネルギ:

$$U = m_1 gl(1-\cos\theta) + m_2 g\{(1-\cos\theta)l_1 + (1-\cos\phi)l_2\}$$

ラグランジュ関数 L:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{l_1^2\dot\theta^2 + l_2^2\dot\phi^2 + 2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi)\right\} - m_1gl(1-\cos\theta)$$
$$- m_2g\{l_1(1-\cos\theta) + l_2(1-\cos\phi)\}$$

ここで，一般化座標を$q_1=\theta$, $q_2=\phi$ として，ラグランジュの方程式(**4.24**)の各項を計算する．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} &= m_1l_1^2\dot\theta + \frac{1}{2}m_2\left\{2l_1^2\dot\theta + 2l_1l_2\dot\phi\cos(\theta-\phi)\right\} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} &= -m_2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) - (m_1+m_2)gl_1\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) &= m_1l_1^2\ddot\theta + m_2l_1^2\ddot\theta + m_2l_1l_2\left\{\ddot\phi\cos(\theta-\phi) - \dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) + \dot\phi^2\sin(\theta-\phi)\right\} \end{aligned}\right\} \text{------①}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} &= \frac{1}{2}m_2\left\{2l_2^2\dot\phi + 2l_1l_2\dot\theta\cos(\theta-\phi)\right\} \\ \frac{\partial L}{\partial\phi} &= m_2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) - m_2gl_2\sin\phi \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) &= m_2l_2^2\ddot\phi + m_2l_1l_2\ddot\theta\cos(\theta-\phi) - m_2l_1l_2\dot\theta^2\sin(\theta-\phi) + m_2l_1l_2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) \end{aligned}\right\} \text{-------②}$$

式①と式②を，ラグランジュの方程式に代入すると，2 重振り子の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &(m_1+m_2)l_1^2\ddot\theta + m_2l_1l_2\ddot\phi\cos(\theta-\phi) + m_2l_1l_2\dot\phi^2\sin(\theta-\phi) + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta = 0 \\ &m_2l_2^2\ddot\phi + m_2l_1l_2\ddot\theta\cos(\theta-\phi) - m_2l_1l_2\dot\theta^2\sin(\theta-\phi) + m_2gl_2\sin\phi = 0 \end{aligned}\right\} \text{-------③}$$

微小角（$\theta \ll 1$, $\phi \ll 1$）と仮定すると，上式の運動方程式を次のように線形化することができる．

$$\left.\begin{aligned} &(m_1+m_2)l_1\ddot\theta + m_2l_2\ddot\phi + (m_1+m_2)g\theta = 0 \\ &l_1\ddot\theta + l_2\ddot\phi + g\phi = 0 \end{aligned}\right\}$$

（注）ラグランジュ関数 L の代わりに，直接に T, Uをラグランジュの方程式(**4.29**)に代入しても，同様に運動方程式③が導出できる．

4.3　ラグランジュの方程式の応用問題(難)

台車(M)の並進変位を x，円柱(m) の軸心 O の回転角を θ として，円柱の運動を考える．

円柱の軸心 O の速度 v は，円周速度$(R-r)\dot\phi$と並進速度$\dot x$とのベクトル和として

$$v^2 = \dot x^2 + 2\dot x(R-r)\dot\phi\cos\phi + (R-r)^2\dot\phi^2$$

となる． 系の運動エネルギ Tとポテンシャル・エネルギ Uはそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}^2 + 2(R-r)\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + (R-r)^2\dot{\phi}^2\right\} \\ U &= \frac{1}{2}kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\phi) \end{aligned}\right\}$$

ここで，$J(=mr^2/2)$は円柱の軸心 O 回りの慣性モーメントである**(付録 A.1)**.

円柱が台車の上を滑らずに転がるための条件は，$R\phi = r(\theta+\phi)$であるから, $\phi = r\theta/(R-r)$ となり

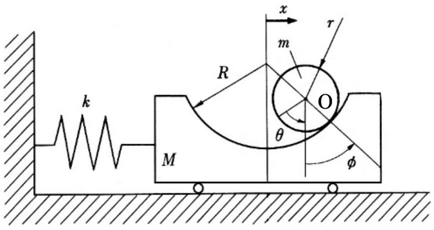
これを T, Uに代入してϕを消去すると

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}^2 + 2(R-r)\dot{x}\left(\frac{r\dot{\theta}}{R-r}\right)\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right\} \\ U &= \frac{1}{2}kx^2 + mg(R-r)\left\{1-\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)\right\} \end{aligned}\right\}$$

式(4.28)の散逸関数 $D=0$ より,一般化座標を$q_1 = x$，$q_2 = \theta$ とおいて，ラグランジュの方程式**(4.24)**の各項を計算する．まずxについて

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left\{2\dot{x} + 2r\dot{\theta}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)\right\} = (M+m)\dot{x} + mr\dot{\theta}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)$$

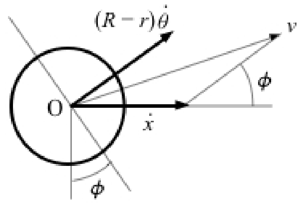
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) - m\dot{\theta}^2\cdot\frac{r^2}{R-r}\cdot\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)$$



$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial U}{\partial x} = kx$$

つぎにθについて

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mr^2}{2}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\left\{2r\dot{x}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + 2r^2\dot{\theta}\right\}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) - \frac{mr^2}{R-r}\dot{x}\dot{\theta}\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{mr^2}{R-r}\dot{x}\dot{\theta}\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right),\quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgr\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)$$

となるため，並進の運動方程式はラグランジュの方程式**(4.24)**に代入すると

$$(M+m)\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) - \frac{mr^2}{R-r}\dot{\theta}^2\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + kx = 0$$

一方，回転の運動方程式はラグランジュの方程式**(4.24)**に代入すると

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) \cancel{- \frac{mr^2}{R-r}\dot{x}\dot{\theta}\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + \frac{mr^2}{R-r}\dot{x}\dot{\theta}\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right)} + mgr\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) = 0$$

さらに，上式は以下のように簡略化できる.

$$\frac{3r}{2}\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) + g\sin\left(\frac{r\theta}{R-r}\right) = 0$$

(注)円柱の軸心 O の回転角θの代わりに$\phi = r\theta/(R-r)$を一般化座標とすると，運動方程式は

$$(M+m)\ddot{x} + m(R-r)\ddot{\phi}\cos\phi - m(R-r)\dot{\phi}^2\sin\phi + kx = 0$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\phi}+\ddot{x}\cos\phi+g\sin\phi=0$$

4.4　たわみ行列の導出問題

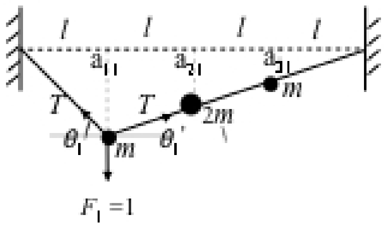
先ず，弦（ここでは，質量を無視して張力による復元力だけを考慮）の左側の質量 m に単位力 $F_1=1$を加えると，弦の張力 Tの鉛直方向の力のつりあいより

$T\sin\theta_1+T\sin\theta_1{}'=1$　ここで，微小角（$\theta_1,\ \theta_1{}'\ll 1$）と仮定すると，$\sin\theta\cong\tan\theta$が成立するので

1）$T\frac{a_{11}}{l}+T\frac{a_{11}}{3l}=1$ これより，$a_{11}=\frac{3l}{4T}$ となる．

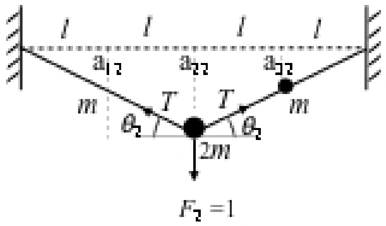
弦の中央と右側の質量のたわみとの比例関係から，$a_{21}=\frac{2}{3}a_{11}=\frac{l}{2T}$，$a_{31}=\frac{1}{3}a_{11}=\frac{l}{4T}$ となる．
次に，中央の質量 $2m$ に単位力$F_2=1$を加えると，同様に鉛直方向の力のつりあいより

2）$T\frac{a_{22}}{2l}+T\frac{a_{22}}{2l}=1$ これより，$a_{22}=\frac{l}{T}$



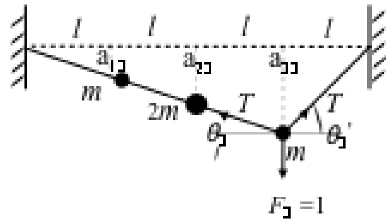
弦の右側の質量のたわみとの比例関係から，$a_{32}=\frac{1}{2}a_{22}=\frac{l}{2T}$，
また，マクスウェルの相反定理より $a_{12}=a_{21}=\frac{l}{2T}$ となる．
さらに，右側の質量 m に単位力$F_3=1$を加えると，同様に鉛直方向の力のつりあいより

3）$T\frac{a_{33}}{3l}+T\frac{a_{33}}{l}=1$　これより，$a_{33}=\frac{3l}{4T}$



相反定理より同様に，$a_{13}=a_{31}=\frac{l}{4T}$，$a_{23}=a_{32}=\frac{l}{2T}$ となる．
以上より，たわみ行列［A］は，以下のような対称行列となる．

$$[A]=\begin{bmatrix}\frac{3l}{4T} & \frac{l}{2T} & \frac{l}{4T}\\ \frac{l}{2T} & \frac{l}{T} & \frac{l}{2T}\\ \frac{l}{4T} & \frac{l}{2T} & \frac{3l}{4T}\end{bmatrix}=\frac{l}{4T}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$



4.5　たわみ行列の導出問題

片持ち（一端固定・他端自由）はりのたわみを求める式は，材料力学の初等はり理論から

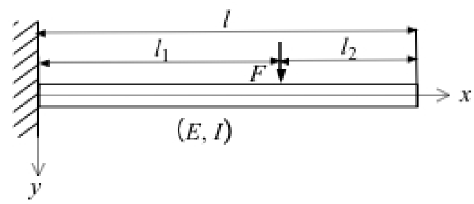
$0\le x\le l_1$ のとき：　$y=\frac{F}{6EI}(3l_1x^2-x^3)$　---------------------　①

$l_1\le x$ のとき：　$y=\frac{F}{6EI}\left(3{l_1}^2x-{l_1}^3\right)$　----------------------　②

m_1に単位力 $F=1$ を加えたとき，３つの位置でのたわみ($0<x<l_1, l_1<x$)

1 -1）$x=l_1$の位置でのたわみ$y_1=\delta_{11}$

$\delta_{11}=\frac{1}{6EI}(3l_1^3-l_1^3)=\frac{1}{6EI}2l_1^3$　-------　式①を使用



1- 2）$x=l_1+l_2$の位置でのたわみ$y_2=\delta_{21}$

$\delta_{21}=\frac{1}{6EI}\{3l_1^2(l_1+l_2)-l_1^3\}=\frac{1}{6EI}(2l_1^3+3l_1^2l_2)$ ------　式②を使用

1- 3 ）$x=l_1+l_2+l_3$の位置でのたわみ$y_3=\delta_{31}$

$\delta_{31}=\frac{1}{6EI}\{3l_1^2(l_1+l_2+l_3)-l_1^3\}=\frac{1}{6EI}(2l_1^3+3l_1^2l_2+3l_1^2l_3)\ =\frac{l_1^2}{6EI}(2l_1+3l_2+3l_3)$ ------式②を使用

m_2に単位力 $F=1$ を加えたとき，３つの位置でのたわみ($0<x<l_1+l_2, l_1+l_2<x$)

2-1）$x=l_1$の位置でのたわみ$y_1=\delta_{12}$

$\delta_{12}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2)l_1^2-l_1^3\}=\frac{1}{6EI}(2l_1^3+3l_1^2l_2)$ ------　式①を使用

2-2）$x=l_1+l_2$の位置でのたわみ$y_2=\delta_{22}$

$\delta_{22}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2)(l_1+l_2)^2-(l_1+l_2)^3\}=\frac{1}{6EI}\{2(l_1+l_2)^3\}$ ------　式①を使用

2-3）$x=l_1+l_2+l_3$の位置でのたわみ$y_3=\delta_{32}$

$\delta_{32}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2)^2(l_1+l_2+l_3)-(l_1+l_2)^3\}=\frac{(l_1+l_2)^2}{6EI}(2l_1+3l_2+3l_3)$ ------　式②を使用

m_3に単位力＝１を加えたとき，３つの位置でのたわみ($0<x<l_1+l_2+l_3, l_1+l_2+l_3<x$)

3-1）$x=l_1$の位置でたわみ$y_1=\delta_{13}$

$\delta_{13}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2+l_3)l_1^2-l_1^3\}=\frac{1}{6EI}(2l_1^3+3l_1^2l_2+3l_1^2l_3)=\frac{l_1^2}{6EI}(2l_1+3l_2+3l_3)$ ------式①を使用

3-2）$x=l_1+l_2$の位置でのたわみ$y_2=\delta_{23}$

$\delta_{23}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2+l_3)(l_1+l_2)^2-(l_1+l_2)^3\}=\frac{(l_1+l_2)^2}{6EI}(2l_1+3l_2+3l_3)$ ------　式①を使用

3-3）$x=l_1+l_2+l_3$の位置でのたわみ$y_3=\delta_{33}$

$\delta_{33}=\frac{1}{6EI}\{3(l_1+l_2+l_3)^3-(l_1+l_2+l_3)^3\}=\frac{1}{6EI}2(l_1+l_2+l_3)^3$ ------　式①を使用

したがって，たわみ行列$[A]$は次のような対称行列となる．

$$[A]=\frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 2l_1^3 & 2l_1^3+3l_1^2l_2 & l_1^2(2l_1+3l_2+3l_3) \\ 2l_1^3+3l_1^2l_2 & 2(l_1+l_2)^3 & (l_1+l_2)^2(2l_1+3l_2+3l_3) \\ l_1^2(2l_1+3l_2+3l_3) & (l_1+l_2)^2(2l_1+3l_2+3l_3) & 2(l_1+l_2+l_3)^3 \end{bmatrix}$$

$\delta_{12}=\delta_{21}$, $\delta_{13}=\delta_{31}$，$\delta_{23}=\delta_{32}$となるため，マクスウェルの相反定理が成立する．

4.6　たわみ行列の導出からの固有値問題

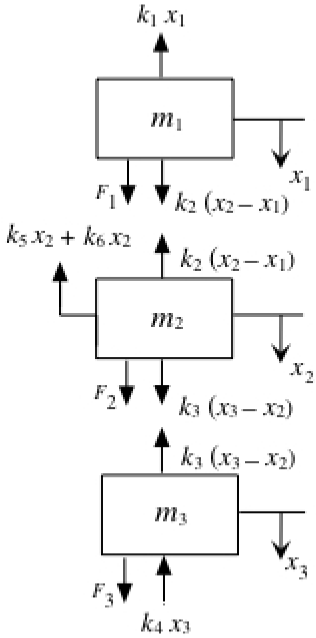
３つの質量m_1, m_2, m_3 の x方向下向きに作用する力をF_1, F_2, F_3とする．

３自由度ばね-質量系の静的な力のつり合い式を自由物体線図から考える．

$$\left.\begin{aligned} &F_1+k_2(x_2-x_1)=k_1x_1 \\ &F_2+k_3(x_3-x_2)=k_2(x_2-x_1)+k_5x_2+k_6x_2 \\ &F_3\ =k_3(x_3-x_2)+k_4x_3 \end{aligned}\right\}\quad \text{-------}\ ①$$

ここで，題意より$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=k$，$m_1=m_2=m_3=m$ である．

最初に$F_1=1, F_2=F_3=0$ を上式の力のつり合い式に代入して，
３つの質量m_1, m_2, m_3 のそれぞれの変位 x_1, x_2, x_3 をa_{11}, a_{21}, a_{31} とする．
上式①の連立方程式を解くと，



$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=\frac{7}{12k}\\ a_{21}&=\frac{1}{6k}\\ a_{31}&=\frac{1}{12k}\end{aligned}\right\}$$

同様に，$F_2=1, F_1=F_3=0$，および　$F_3=1, F_1=F_2=0$ のときの
質量m_1, m_2, m_3 の変位 x_1, x_2, x_3 を，それぞれ (a_{12}, a_{22}, a_{32})，
(a_{13}, a_{23}, a_{33})　として上式①の連立方程式を解くと，

$$\left.\begin{aligned} a_{12}&=\frac{1}{6k}\\ a_{22}&=\frac{1}{3k}\\ a_{32}&=\frac{1}{6k}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_{13}&=\frac{1}{12k}\\ a_{23}&=\frac{1}{6k}\\ a_{33}&=\frac{7}{12k}\end{aligned}\right\}$$

これらより，たわみ行列$[A]$は

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31}\\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{a}_{32}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{12k} & \frac{1}{6k} & \frac{1}{12k}\\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{3k} & \frac{1}{6k}\\ \frac{1}{12k} & \frac{1}{6k} & \frac{7}{12k}\end{bmatrix}$$

となる．$a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$ （影響係数の対称性が成立）となるため，マクスウェルの相反定理が成立することが分かる．剛性行列$[K]$は，たわみ行列$[A]$の逆行列であるため，**付録 A3−10** に従って求めると

$$[K]=[A]^{-1}=\begin{bmatrix} 2k & -k & 0\\ -k & 4k & -k\\ 0 & -k & 2k\end{bmatrix}$$

集中質量系なので質量行列$[m]$ は視察によって求まり，自由振動の運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\{\ddot{x}\}+\begin{bmatrix} 2k & -k & 0\\ -k & 4k & -k\\ 0 & -k & 2k\end{bmatrix}\{x\}=\{0\} \qquad \text{-------------} \quad ②$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する

$$\begin{Bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}\sin(\omega t+\phi) \qquad \text{-------------} \quad ③$$

式③を式②に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{X\}=\{0\}$$　　すなわち

$$\left\{\begin{bmatrix}2k & -k & 0\\ -k & 4k & -k\\ 0 & -k & 2k\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=\{0\} \qquad \text{-------------} \quad ④$$

その係数行列式＝０とおくと，次の振動数方程式を得る．

$$\begin{vmatrix}2k-m\omega^2 & -k & 0\\ -k & 4k-m\omega^2 & -k\\ 0 & -k & 2k-m\omega^2\end{vmatrix}=(2k-m\omega^2)(m^2\omega^4-6km\omega^2+6k^2)=0$$

この振動数方程式を解くと，次の３つの解を得る．

$$\omega^2=\left(3-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m},\qquad \frac{2k}{m},\qquad \left(3+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}$$

これより，１次，２次，３次の固有角振動数を $\omega_1<\omega_2<\omega_3$とすると，次のようになる．

$$\omega_1=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{2k}{m}},\quad \omega_3=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}}$$

１次，２次，３次の固有振動モードを求める．

１）１次モード：$\omega^2={\omega_1}^2$を式④の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix}2k-\left(3-\sqrt{3}\right)k & -k & 0\\ -k & 4k-\left(3-\sqrt{3}\right)k & -k\\ 0 & -k & 2k-\left(3-\sqrt{3}\right)k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1^{(1)}\\ X_2^{(1)}\\ X_3^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

ここで，$X_1^{(1)}=1$ と置いて上式の連立方程式を解くと

$$X^{(1)}=\begin{Bmatrix}x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\\ x_3^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -1+\sqrt{3}\\ 1\end{Bmatrix}$$

2）2 次モード：$\omega^2={\omega_2}^2$を式④の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix}2k-2k & -k & 0\\ -k & 4k-2k & -k\\ 0 & -k & 2k-2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1^{(2)}\\ X_2^{(2)}\\ X_3^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

ここで，$X_2^{(1)}=1$ と置いて上式の連立方程式を解くと

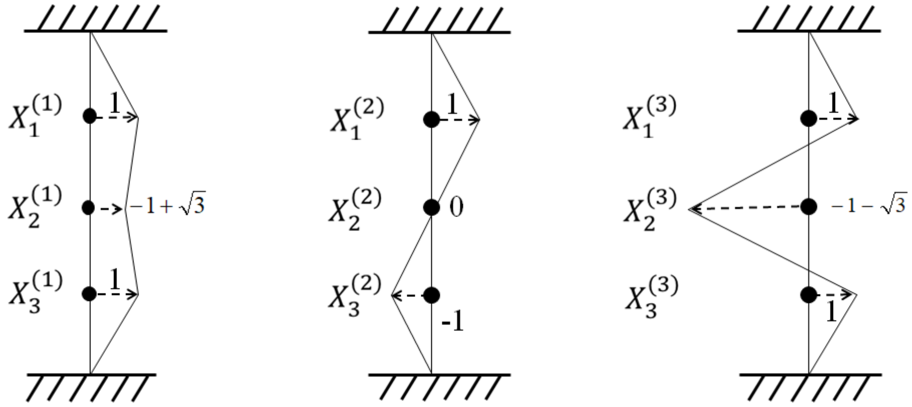
$$X^{(2)}=\begin{Bmatrix}x_1^{(2)}\\ x_2^{(2)}\\ x_3^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix}$$

3）3 次モード：$\omega^2={\omega_3}^2$を式④の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix}2k-\left(3+\sqrt{3}\right)k & -k & 0\\ -k & 4k-\left(3+\sqrt{3}\right)k & -k\\ 0 & -k & 2k-\left(3+\sqrt{3}\right)k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1^{(3)}\\ X_2^{(3)}\\ X_3^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

ここで，$X_3^{(1)}=1$ と置いて上式の連立方程式を解くと

$$X^{(3)}=\begin{Bmatrix}x_1^{(3)}\\x_2^{(3)}\\x_3^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1-\sqrt{3}\\1\end{Bmatrix}$$



4.7　ラグランジュの方程式の応用問題(難)

３つの振り子の支点(O_1, O_2, O_3)回りの慣性モーメントをJとすると，運動エネルギTとポテンシャル・エネルギUは，それぞれ

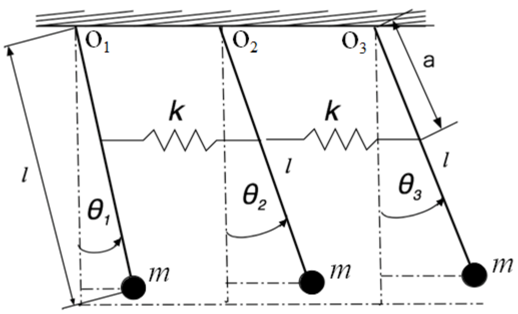
$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}_3^2\\U&=\frac{1}{2}\{k(a\theta_2-a\theta_1)^2+k(a\theta_3-a\theta_2)^2\}+mgl\{(1-\cos\theta_1)+(1-\cos\theta_2)+(1-\cos\theta_3)\}\end{aligned}\right\}$$

散逸関数 $D=0$ より,一般化座標を $q_1=\theta_1$, $q_2=\theta_2$, $q_3=\theta_3$ とおいてラグランジュの方程式(**4.29**)に代入すると，各項は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=J\dot{\theta}_1,\quad \frac{\partial T}{\partial\theta_1}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta_1}=k(a\theta_2-a\theta_1)\cdot(-a)+mgl\sin\theta_1\\&\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=J\dot{\theta}_2,\quad \frac{\partial T}{\partial\theta_2}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta_2}=k(a\theta_2-a\theta_1)\cdot a+k(a\theta_3-a\theta_2)\cdot(-a)+mgl\sin\theta_2\\&\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_3}=J\dot{\theta}_3,\quad \frac{\partial T}{\partial\theta_3}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta_3}=k(a\theta_3-a\theta_2)\cdot a+mgl\sin\theta_3\end{aligned}\right\}$$

となり微小角($\theta\ll 1$)と仮定すると$\sin\theta\approx\theta$ と近似できるため，回転の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}&J\ddot{\theta}_1-ka^2(\theta_2-\theta_1)+mgl\theta_1=0\\&J\ddot{\theta}_2+ka^2(\theta_2-\theta_1)-ka^2(\theta_3-\theta_2)+mgl\theta_2=0\\&J\ddot{\theta}_3+ka^2(\theta_3-\theta_2)+mgl\theta_3=0\end{aligned}\right\}$$



$J=ml^2$ であるから，これを上式に代入して整理すると

$$\left.\begin{aligned} &ml^2\ddot{\theta}_1+(ka^2+mgl)\theta_1-ka^2\theta_2=0\\ &ml^2\ddot{\theta}_2-ka^2\theta_1+(2ka^2+mgl)\theta_2-ka^2\theta_3=0\\ &ml^2\ddot{\theta}_3-ka^2\theta_2+(ka^2+mgl)\theta_3=0 \end{aligned}\right\}$$

上式を行列形式で書くと

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 & 0\\ 0 & ml^2 & 0\\ 0 & 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} ka^2+mgl & -ka^2 & 0\\ -ka^2 & 2ka^2+mgl & -ka^2\\ 0 & -ka^2 & ka^2+mgl \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \quad \text{-------------} \quad ①$$

自由振動の一般解（**演習問題 3.5** の式②）を仮定して上式に代入すると，次の固有値問題

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\begin{Bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \Theta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \quad \text{-----------------} \quad ②$$

を得る．その係数行列式＝ 0 から，次の振動数方程式を得る．

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=\begin{vmatrix} ka^2+mgl-ml^2\omega^2 & -ka^2 & 0\\ -ka^2 & 2ka^2+mgl-ml^2\omega^2 & -ka^2\\ 0 & -ka^2 & ka^2+mgl-ml^2\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

（３ x ３)行列式の展開公式(**付録 A3‒9**)を用いて展開すると

$$(2ka^2+mgl-ml^2\omega^2)(ka^2+mgl-ml^2\omega^2)^2-2k^2a^4(ka^2+mgl-ml^2\omega^2)=0$$

ここで，$X=mgl-ml^2\omega^2$ とおくと　$(2ka^2+X)(ka^2+X)^2-2k^2a^4(ka^2+X)=0$

展開して整理すると，$X^3+4ka^2X^2+3k^2a^4X=0$，さらに因数分解して Xを求める

$$X(X+ka^2)(X+3ka^2)=0 \qquad \therefore \quad X=0,\ -ka^2,\ -3ka^2$$

固有角振動数を$\omega_1<\omega_2<\omega_3$ とすると，

$$\left.\begin{aligned} &\text{1 次固有角振動数：}\quad \omega_1^2=\frac{mgl}{ml^2}=\frac{g}{l} \qquad \therefore \quad \omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}\\ &\text{2 次固有角振動数：}\quad \omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{ka^2}{ml^2} \qquad \therefore \quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{ka^2}{ml^2}}\\ &\text{3 次固有角振動数：}\quad \omega_3^2=\frac{g}{l}+\frac{3ka^2}{ml^2} \qquad \therefore \quad \omega_3=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{3ka^2}{ml^2}} \end{aligned}\right\}$$

1 次，２次，３次の固有振動モードを，それぞれ上添字 $^{(1)},{}^{(2)},{}^{(3)}$ で表すと

１）1 次モード： $\omega^2=\omega_1^2$を式②の係数行列に代入すると

$$\left[[K]-\omega_1^2[M]\right]\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(1)}\\ \Theta_2^{(1)}\\ \Theta_3^{(1)}\end{Bmatrix}=ka^2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(1)}\\ \Theta_2^{(1)}\\ \Theta_3^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$\Theta_1^{(1)}=1$ とおいて上式の連立方程式を解くと， $\Theta^{(1)}=\{1 \quad 1 \quad 1\}^T$　（剛体モード）．

２）2 次モード：$\omega^2=\omega_2^2$を式②の係数行列に代入すると

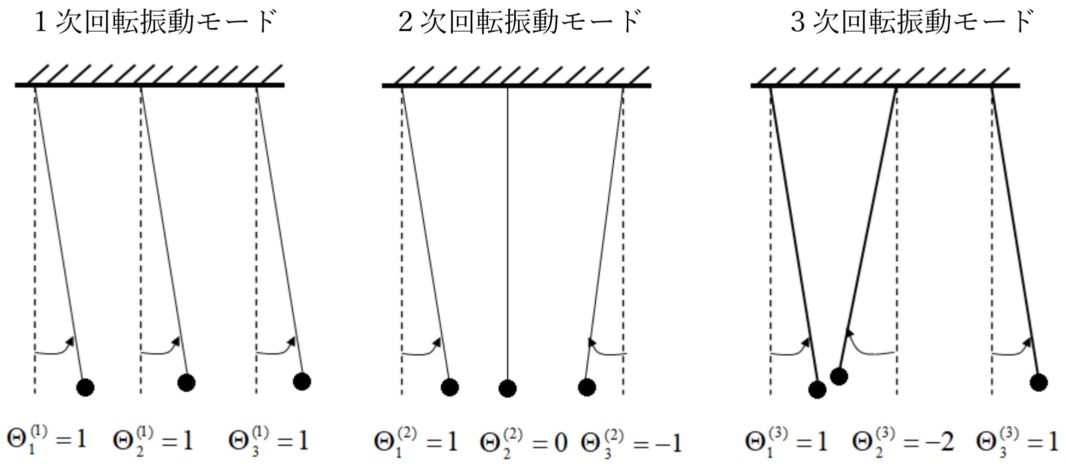
$$\left[[K]-\omega_2^2[M]\right]\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(2)}\\ \Theta_2^{(2)}\\ \Theta_3^{(2)}\end{Bmatrix}=ka^2\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(2)}\\ \Theta_2^{(2)}\\ \Theta_3^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$\Theta_1^{(2)}=1$ とおいて上式の連立方程式を解くと，$\Theta^{(2)}=\{1\quad 0\quad -1\}^T$.

３）３次モード：$\omega^2=\omega_3^2$を式②の係数行列に代入すると

$$\left[[K]-\omega_3^2[M]\right]\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(3)}\\ \Theta_2^{(3)}\\ \Theta_3^{(3)}\end{Bmatrix}=ka^2\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(3)}\\ \Theta_2^{(3)}\\ \Theta_3^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix},$$

$\Theta_1^{(3)}=1$ とおいて上式の連立方程式を解くと，$\Theta^{(3)}=\{1\quad -2\quad 1\}^T$.



4.8　たわみ行列の導出からの固有値問題

[演習問題 4.4] のたわみ行列［A］の逆行列を**（付録 A3-10）**によって，剛性行列［K］を求めると

$$[K]=[A]^{-1}=\frac{T}{4l}\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\ -4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{bmatrix}=\frac{T}{l}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

また，集中質量系なので質量行列［M］は対角行列となり，視察によって

$$[M]=\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

となる．この系の運動方程式を行列形式で表示すると

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \qquad \text{-----------} \quad ①$$

となり，自由振動の一般解（**演習問題 4.6** の式③）を仮定して上式に代入すると，次の固有値問題

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{X\}=\{0\} \qquad \text{-----------} \quad ②$$

を得る．その係数行列式＝０とおくと，次の振動数方程式を得る．

$$\left|\frac{T}{l}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\omega^2 m & 0 & 0\\ 0 & 2\omega^2 m & 0\\ 0 & 0 & \omega^2 m\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{2T}{l}-m\omega^2 & -\dfrac{T}{l} & 0\\ -\dfrac{T}{l} & \dfrac{2T}{l}-2m\omega^2 & -\dfrac{T}{l}\\ 0 & -\dfrac{T}{l} & \dfrac{2T}{l}-m\omega^2\end{vmatrix}=\{0\}$$

行列式の展開公式(**付録 A3−9**)によって

$$\left(\frac{2T}{l}-m\omega^2\right)\left(\frac{2T^2}{l^2}-\frac{6Tm}{l}\omega^2+2m^2\omega^4\right)=0$$

上式から，3 つの固有角振動数を $\omega_1<\omega_2<\omega_3$ とすると

$$\left.\begin{array}{ll}
1\text{ 次固有角振動数：}\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})T}{2ml} & \therefore\omega_1=\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})T}{2ml}} \\
2\text{ 次固有角振動数：}\omega_2^2=\frac{2T}{ml} & \therefore\omega_2=\sqrt{\frac{2T}{ml}} \\
3\text{ 次固有角振動数：}\omega_3^2=\frac{(3+\sqrt{5})T}{2ml} & \therefore\omega_3=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})T}{2ml}}
\end{array}\right\}$$

それぞれの固有振動モードは前問と同様に式②の係数行列に $\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ \omega_3^2$ を順次代入して，連立方程式を解けばよい．

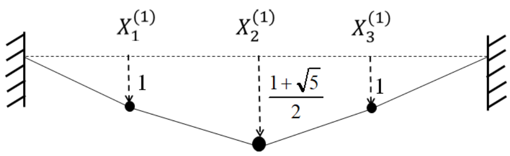
その時，$\left\{X_1^{(i)}\right\}=1$（$i$ =1~3）とおいて連立方程式を解くと次のようになる．

1）1 次モード：$\omega^2=\omega_1{}^2$のとき　$\left\{X^{(1)}\right\}=\left\{1\quad\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad 1\right\}^T$

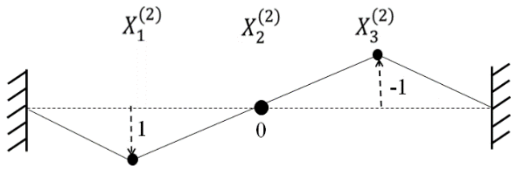
2）2 次モード：$\omega^2=\omega_2{}^2$のとき　$\left\{X^{(2)}\right\}=\{1\quad 0\quad -1\}^T$

3）3 次モード：$\omega^2=\omega_3{}^2$のとき　$\left\{X^{(3)}\right\}=\left\{1\quad\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad 1\right\}^T$

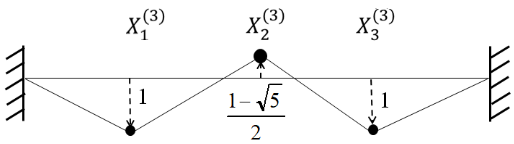
1 次振動モード



2 次振動モード



3 次振動モード



4.9　モーダル解析の 3 自由度の非減衰強制振動への応用問題(難)

3 自由度ばね一質量系の運動方程式は自由物体線図から

$$\left.\begin{array}{l}
m_1\ddot{x}_1=k_2(x_2-x_1)-k_1x_1+F_0 \\
m_2\ddot{x}_2=k_3(x_3-x_2)-k_2(x_2-x_1)-k_5x_2-k_6x_2 \\
m_3\ddot{x}_3=-k_3(x_3-x_2)-k_4x_3
\end{array}\right\}$$

題意より　$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=k\,,m_1=m_2=m_3=m,\ F_0=1$ である．

上式を行列形式で表示すると

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 4k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\quad \text{-------------}\ ①$$

自由振動の一般解（**演習問題 4.6** の式③）を仮定して，上式に代入すると次の固有値問題を得る．

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{X\}=\{0\}\quad \text{------------}\ ②$$

その係数行列式＝0 から，次の振動数方程式を得る．

$$|[K]-\omega^2[M]| = \begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 4k-\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = (2k-\omega^2 m)(6k^2-6mk\omega^2+m^2\omega^4)=0$$

これより，３つの解 $\omega^2=\left(3\pm\sqrt{3}\right)\frac{k}{m},\ \frac{2k}{m}$ を得る．$\omega_1<\omega_2<\omega_3$ とすると

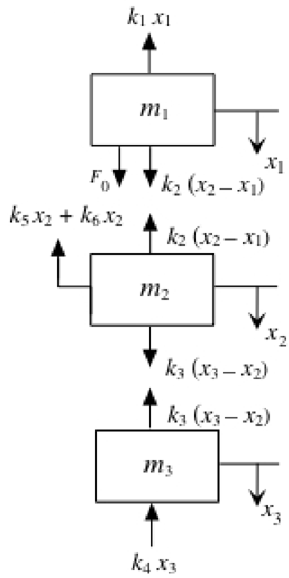
$$\omega_1=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{2k}{m}},\ \omega_3=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}},$$

固有値問題②を解いて，固有振動モード（振幅比）$\{X\}$ を求める．

１）１次モード：$\omega^2={\omega_1}^2$ を式②の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix} 2k-\left(3-\sqrt{3}\right)k & -k & 0 \\ -k & 4k-\left(3-\sqrt{3}\right)k & -k \\ 0 & -k & 2k-\left(3-\sqrt{3}\right)k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$X_1^{(1)}=1$ とおいて，上の連立方程式を解くと



$$\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

２）２次モード：$\omega^2={\omega_2}^2$ を式②の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix} 2k-2k & -k & 0 \\ -k & 4k-2k & -k \\ 0 & -k & 2k-2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$X_1^{(2)}=1$ とおいて，上の連立方程式を解くと

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

３）３次モード：$\omega^2={\omega_3}^2$ を式②の係数行列に代入すると

$$\begin{bmatrix} 2k-\left(3+\sqrt{3}\right)k & -k & 0 \\ -k & 4k-\left(3+\sqrt{3}\right)k & -k \\ 0 & -k & 2k-\left(3+\sqrt{3}\right)k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$X_1^{(3)}=1$ とおいて，上の連立方程式を解くと

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

これらの３つの固有振動モード（固有ベクトル）を列方向に並べると，モード行列は，

$$[X]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1+\sqrt{3} & 0 & -1-\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

式(4.14)に従って，モード行列を$[M]$–正規化すると，次のように求まる．

$$[\bar{X}] = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{-(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 & \frac{-(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

またその正規モード行列の逆行列は，**付録 A3-10** の公式から次のようになる．

$$[\bar{X}]^{-1} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{-(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 & \frac{-(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

モード座標による非減衰強制振動の一般解（完全解）は，**式(4.67)**から自由振動の一般解と強制振動の特殊解の和として

$$q_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t f_{qi}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

ここで，自由振動の一般解の振幅A_iと位相角ϕ_iを**式(4.59)**から求める

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \sqrt{q_i^2(0) + \left\{\frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}\right\}^2} \quad \text{-------------} \quad ③ \\ \phi_i &= \tan^{-1}\left\{\frac{\omega_i q_i(0)}{\dot{q}_i(0)}\right\} \quad \text{-------------} \quad ④ \end{aligned}\right\}$$

まず，モード座標による初期条件　$q_i(0),\ \dot{q}_i(0)$ を求める．**式(4.69)**から

$$\left.\begin{aligned} \{q_i(0)\} &= [\bar{X}]^{-1}\{x(0)\} = [\bar{X}]^T[M]\{x(0)\} \\ \{\dot{q}_i(0)\} &= [\bar{X}]^{-1}\{\dot{x}(0)\} = [\bar{X}]^T[M]\{\dot{x}(0)\} \end{aligned}\right\}$$

ここで物理座標系の初期条件　$\{x(0)\} = \{0\quad 0\quad 0\}^T,\ \{\dot{x}(0)\} = \{0\quad 0\quad 0\}^T$　（静止条件）を用いて，モード座標系での初期条件を計算すると

$$\{q_i(0)\} = \{\dot{q}_i(0)\} = \{0\} \qquad (i=1\sim3)$$

となる．上式を式③と式④に代入して計算すると，$A_i = \phi_i = 0$（i=1~3）となり，自由振動の一般解は$\{q_h(t)\} = \{0\}$となる．つぎにモード座標による非減衰強制振動の特殊解は，**式(4.67)**の第 2 項のたたみ込み積分の形で，つぎのように与えられる．

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t f_{qi}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \quad \text{-------} \quad ⑤$$

モード座標による外力ベクトル $\{f_q(t)\}$ を，**式(4.66)**から求める

$$\{f_q(t)\} = [\bar{X}]^T\{f(t)\}$$

$$[\bar{X}]^T = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \qquad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ を上式に代入して計算すると

$$\{f_q(t)\} = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{Bmatrix}.$$

このモード外力ベクトル成分を，式⑤に代入してたたみ込み積分を実行する．

1）1 次モード：$i=1$ のとき $\left(\omega_1 = \sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}},\ f_{q1}(\tau) = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\right)$

$$q_1(t) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t f_{q1}(\tau)\sin\omega_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\sin\omega_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\frac{1}{{\omega_1}^2}\left(1-\cos\omega_1 t\right)$$

2） 2 次モード：$i=2$ のとき $\left(\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}},\ f_{q2}(\tau) = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\right)$

$$q_2(t) = \frac{1}{\omega_2}\int_0^t f_{q2}(\tau)\sin\omega_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_2}\int_0^t \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\sin\omega_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{{\omega_2}^2}\left(1-\cos\omega_2 t\right)$$

3） 3 次モード：$i=3$ のとき $\left(\omega_3 = \sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)\frac{k}{m}},\ f_{q3}(\tau) = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\right)$

$$q_3(t) = \frac{1}{\omega_3}\int_0^t f_{q3}(\tau)\sin\omega_3(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_3}\int_0^t \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\sin\omega_3(t-\tau)\,d\tau = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\frac{1}{{\omega_3}^2}\left(1-\cos\omega_3 t\right)$$

モード座標系の変位ベクトル$\{q(t)\}$を物理座標系の変位ベクトル$\{x(t)\}$に戻す．**式(4.55)**から

$$\{x(t)\} = [\bar{X}]\{q(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{-\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 & \frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix}$$

したがって，物理座標系による強制振動の一般解（完全解）は，上式を展開して

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}q_1(t) + q_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}q_3(t)\right\} \\ x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\left\{-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}q_1(t) - \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}q_3(t)\right\} \\ x_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}q_1(t) - q_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}q_3(t)\right\} \end{aligned}\right\}$$

4.10 モーダル解析の 2 自由度の非減衰強制振動への応用問題（難）

教科書の**例題 4.5** より，正規モード行列は，

$$[\bar{X}] = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{------------} \quad ①$$

式①の逆行列を**付録 A3-10** の公式に従って計算すると

$$[\bar{X}]^{-1} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{------------} \quad ②$$

式（4.55）より，$\{q(t)\} = [\bar{X}]^{-1}\{x(t)\}$ （$q(t)$ は時間関数である一般化変位ベクトル）

物理座標系による初期条件：$x(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$，$\dot{x}(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ より

モード座標系による初期変位は，式②を使用して

$$q(0) = [\bar{X}]^{-1}\{x(0)\} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{----------} \quad ③$$

モード座標系による初速度は，式②を使用して

$$\dot{q}(0) = [\bar{X}]^{-1}\{\dot{x}(0)\} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{------------} \quad ④$$

モード座標系による自由振動の一般解は，**式（4.59）**から

$$q_{h_i}(t) = A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (i = 1, 2) \quad \text{------------} \quad ⑤$$

ここで，変位振幅と初期位相角は，以下の式で与えられる．

$$A_i = \sqrt{q_i^2(0) + \left\{\frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}\right\}^2},\ \ \phi_i = \tan^{-1}\left\{\frac{\omega_i q_i(0)}{\dot{q}_i(0)}\right\} \quad (i = 1, 2) \quad \text{------------} ⑥$$

例題 4.5 より 1 次および 2 次固有角振動数は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

であるから，モード座標系による 2 自由度系の自由振動の一般解の振幅と初期位相角は，式③と式④を式⑥に代入することによって

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{25m^2}{2k}},\ \ \phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{k}{m}}\right\} \\ A_2 &= \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^2}{6k}},\ \ \phi_2 = \tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{3k}{m}}\right\} \end{aligned}\right\}$$

したがって，モード座標系による 2 自由度系の自由振動の一般解は，式⑤から次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} q_{h1}(t) &= \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{25m^2}{2k}}\ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right), \qquad \phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{k}{m}}\right\} \\ q_{h2}(t) &= \sqrt{\frac{m}{2} + \frac{m^2}{6k}}\ \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right), \qquad \phi_2 = \tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{3k}{m}}\right\} \end{aligned}\right\}$$

モード座標による外力ベクトルは，式①を**式（4.66）**に代入して

$$\{f_q(t)\} = [\bar{X}]^T\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

モード座標系による強制振動の特殊解は，**式（4.67）**の第 2 項のたたみ込み積分を実行すると

$$\left.\begin{aligned} q_{p1}(t) &= \frac{1}{\omega_1}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2m}}\sin\omega_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int_0^t \sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ q_{p2}(t) &= \frac{1}{\omega_2}\int_0^t \frac{-1}{\sqrt{2m}}\sin\omega_2(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{9k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{aligned}\right\}$$

したがって，モード座標系による強制振動の一般解（完全解）は，**式(4.67)**から自由振動の一般解と強制振動の特殊解との和として

$$\left.\begin{aligned} q_1(t) &= q_{h1}(t)+q_{p1}(t) = \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{25m^2}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi_1\right)+\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ q_2(t) &= q_{h2}(t)+q_{p2}(t) = \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{m^2}{6k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\phi_2\right)-\frac{1}{9k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{aligned}\right\}$$

を得る．さらに上式を，**式(4.55)**の$\{x(t)\}=[\bar{X}]\{q(t)\}$に代入して元の物理座標系で表す．

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{25m^2}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi_1\right)+\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{m^2}{6k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\phi_2\right)-\frac{1}{9k}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{bmatrix}$$

ただし，$\phi_1=\tan^{-1}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{k}{m}}\right\}$，$\phi_2=\tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{3k}{m}}\right\}$.

上の行列表示した一般解を展開して表示すると，次のように書ける．

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{25m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi_1\right)+\frac{1}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\sqrt{1+\frac{m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\phi_2\right)-\frac{1}{9k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\right\}$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{25m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi_1\right)+\frac{1}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)-\sqrt{1+\frac{m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\phi_2\right)+\frac{1}{9k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\right\}$$