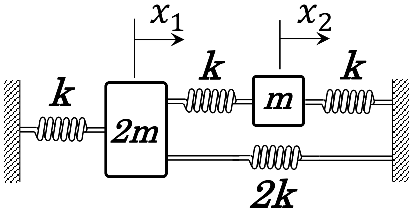
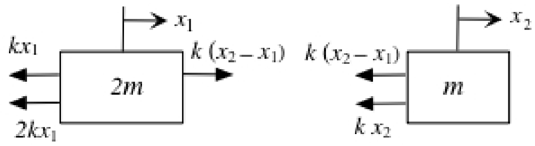
[演習問題 3]

3.1 与えられた 2 自由度ばね—質量系の自由物体線図は，以下のよう書ける．





運動方程式は自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) - kx_1 - 2kx_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}$$

となる．上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-------------} \quad ①$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{-------------} \quad ②$$

この式②を運動方程式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 4k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-----------} \quad ③$$

上式の係数行列式=0 とすると，次の振動数方程式を得る．

$$(4k - 2m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 2m^2\omega^4 - 8mk\omega^2 + 7k^2 = 0$$

ω^2に関する 2 次方程式を解の公式(**付録 A4**)によって求めると，固有角振動数は

$$\omega^2 = \frac{8mk \pm \sqrt{64m^2k^2 - 56m^2k^2}}{4m^2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

したがって，固有角振動数を，$\omega_{n1} < \omega_{n2}$とすると

$$\omega_{n1}^2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\cdot\frac{k}{m}, \quad \omega_{n2}^2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

となる．次に固有振動モード（振幅比）を求める．

１）1 次モード： $\omega^2 = \omega_{n1}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式をとくと，第 1 式から

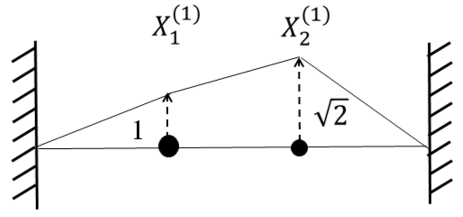
$$\left(4k - 2m\frac{4 - \sqrt{2}}{2}\frac{k}{m}\right)X_1^{(1)} - kX_2^{(1)} = 0$$

整理すると

$$\sqrt{2}X_1^{(1)} - X_2^{(1)} = 0$$

したがって，振幅比は

1 次振動モード



$$\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \sqrt{2} \qquad \text{すなわち} \quad \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

（注）固有値問題③の連立方程式の第 2 式を使用しても同様な解を得る．

2）2 次モード：$\omega^2 = \omega_{n2}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式をとくと，第 1 式から

$$\left(4k - 2m\frac{4+\sqrt{2}}{2}\frac{k}{m}\right)X_1^{(2)} - kX_2^{(2)} = 0$$

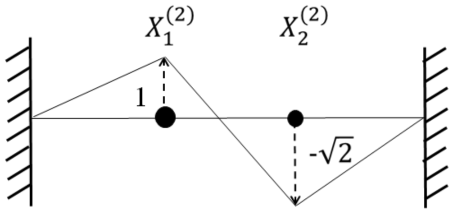
整理すると

$$-\sqrt{2}X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0$$

したがって，振幅比は，

$$\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = -\sqrt{2} \qquad \text{すなわち} \quad \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

2 次振動モード

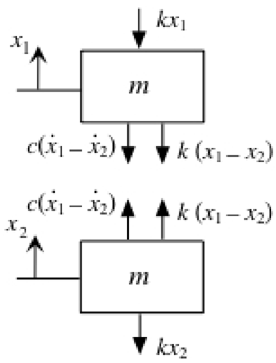


3.2　2 自由度ばね—質量—ダッシュポット系の振動数方程式を求める問題である．

この問題では複素数の解を導く必要があり，数値計算が可能な場合には，**7 章**の **7.2.1 項**のルンゲクッタ法が適用できるように 1 階の微分方程式に変形するのが一般的である．ここでは，複素数を使った変形を行う．

運動方程式は，自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned}\right\}$$



上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{------} \quad ①$$

ここで，自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$x_1(t) = \tilde{A}_1 e^{j\omega t},\ x_2(t) = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \quad \text{-------------} \quad ②$$

ここで，$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ は複素振幅を表す．

この式②を運動方程式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 2k + jc\omega - m\omega^2 & -jc\omega - k \\ -jc\omega - k & 2k + jc\omega - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式の係数行列式= 0 とおくと，次の振動数方程式を得る．

$$(2k + jc\omega - m\omega^2)^2 - (jc\omega + k)^2 = m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 + 2jc\omega(-m\omega^2 + k) = 0$$

これまでの減衰がない場合の振動数方程式は，ω^2に関する 2 次方程式になってきたが，上式はωの 4 次方程式になるため，解は 2 組の共役複素数となる．

3.2（別解）

運動方程式は式①と同様で

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$x_1(t) = Ae^{\lambda t}$，$x_2(t) = Be^{\lambda t}$　　　ここで，A，Bは変位振幅を表す．

上式を運動方程式に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 2k + c\lambda + m\lambda^2 & -k - c\lambda \\ -k - c\lambda & 2k + c\lambda + m\lambda^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式の係数行列式＝0 とおくと，振動数方程式は

$$(2k + c\lambda + m\lambda^2)^2 - (k + c\lambda)^2 = m^2\lambda^4 + 2mc\lambda^3 + 4mk\lambda^2 + 2kc\lambda + 3k^2 = 0$$

となる．これはλの 4 次方程式となる．いま 4 つの根をλ_1, λ_2, λ_3, λ_4 とすると，一般解は次のように書ける．

$x_1(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} + A_3e^{\lambda_3 t} + A_4e^{\lambda_4 t}$　-----------　①

$x_2(t) = B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t} + B_3e^{\lambda_3 t} + B_4e^{\lambda_4 t}$　-----------　②

ここで，振幅比を

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{k + c\lambda_i}{2k + c\lambda_i + m\lambda_i{}^2} = \frac{2k + c\lambda_i + m\lambda_i{}^2}{k + c\lambda_i} = \frac{1}{\mu_i} \quad (i=1,2,3,4)$$

とおいて，$B_i = \mu_i A_i$　$(i=1,2,3,4)$の関係を利用すると，式②は次のように書き直せる．

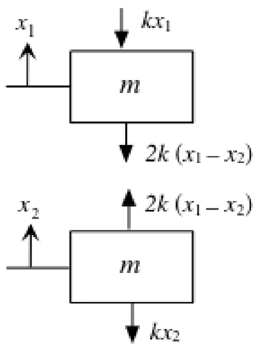
$$x_2(t) = \mu_1A_1e^{\lambda_1 t} + \mu_2A_2e^{\lambda_2 t} + \mu_3A_3e^{\lambda_3 t} + \mu_4A_4e^{\lambda_4 t}$$

したがって，任意定数A_1, A_2, A_3, A_4 を与えられた初期条件$x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$ から決定すれば一般解①，②を求めることができる．

3.3 図 3.1 の 2 自由度ばね一質量系で，$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = k_3 = k$，$k_2 = 2k$ とし，初期条件 $x_1(0) = 1$，$\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ のとき，自由振動の一般解を求める．

2 つの質量の運動方程式は自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - 2k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 + 2k(x_1 - x_2) \end{aligned}\right\}$$



上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{------------} \quad ①$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{------------} \quad ②$$

この式②を運動方程式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{------------} \quad ③$$

上式の係数行列式= 0 とおくと，次の振動数方程式を得る．

$$(3k - m\omega^2)^2 - 4k^2 = m^2\omega^4 - 6mk\omega^2 + 5k^2 = (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 5k) = 0$$

より，固有角振動数を，$\omega_{n1} < \omega_{n2}$ とすると

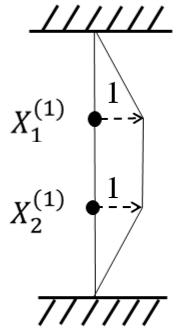
$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \ \omega_{n2} = \sqrt{\frac{5k}{m}}$$

となる．固有振動モード（振幅比）を求める．

１）１次モード: $\omega^2 = \omega_{n1}^2$ を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第１式から

$$\left(3k - m\frac{k}{m}\right)X_1^{(1)} - 2kX_2^{(1)} = 0$$

１次振動モード



整理すると

$$X_1^{(1)} - X_2^{(1)} = 0$$

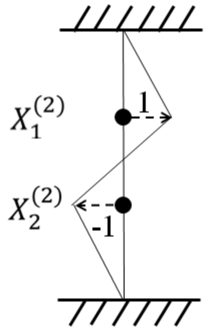
したがって，振幅比は，

$$\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = 1\ (=\kappa_1) \qquad \text{すなわち} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

２）２次モード：$\omega^2 = \omega_{n2}^2$ を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第１式から

$$\left(3k - m\frac{5k}{m}\right)X_1^{(2)} - 2kX_2^{(2)} = 0$$

２次振動モード



整理すると

$$-X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0$$

したがって，振幅比は，

$$\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = -1\ \ (=\kappa_2) \quad \text{すなわち} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

次に自由振動の一般解は，１次および２次の固有振動数モードを重ね合わせて次のように書ける．

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= X_1{}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t + \phi_1) + X_1{}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t + \phi_2) \\ x_2(t) &= X_2{}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t + \phi_1) + X_2{}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t + \phi_2) \end{aligned}\right\}$$

ここで，上の固有値問題で求めた振幅比κ_1, κ_2を用いて書き直すと

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= X_1{}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t + \phi_1) + X_1{}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t + \phi_2) \\ x_2(t) &= \kappa_1 X_1{}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t + \phi_1) + \kappa_2 X_1{}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t + \phi_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{------------} \quad ④$$

となり，未知数は$X_1{}^{(1)}$，$X_1{}^{(2)}$，ϕ_1，ϕ_2 の４つになる．初期条件が４つ与えられているので，これらの４つの未知数を決定することができる．

初期条件　$x_1(0) = 1$，$\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= X_1{}^{(1)}\sin\phi_1 + X_1{}^{(2)}\sin\phi_2 = 1 & -----⑤ \\ x_2(0) &= \kappa_1 X_1{}^{(1)}\sin\phi_1 + \kappa_2 X_1{}^{(2)}\sin\phi_2 = 0 & -----⑥ \\ \dot{x}_1(0) &= \omega_{n1}X_1{}^{(1)}\cos\phi_1 + \omega_{n2}X_1{}^{(2)}\cos\phi_2 = 0 & -----⑦ \\ \dot{x}_2(0) &= \kappa_1\omega_{n1}X_1{}^{(1)}\cos\phi_1 + \kappa_2\omega_{n2}X_1{}^{(2)}\cos\phi_2 = 0 & -----⑧ \end{aligned}\right\}$$

となる．上式の連立方程式を解いて，４つの未知数を求める．

式⑦× κ_2ー式⑧より

$$(\kappa_2 - \kappa_1)\omega_{n1}X_1{}^{(1)}\cos\phi_1 = 0$$

ここで，$(\kappa_2-\kappa_1)\neq 0$，$\omega_{n1}\neq 0$，$X_1{}^{(1)}\neq 0$とすれば，$\cos\phi_1=0$ なので，$\phi_1={}^{\pi}/_{2}$

式⑦× κ 1－式⑧より

$$(\kappa_1-\kappa_2)\omega_{n2}X_1{}^{(2)}\cos\phi_2=0$$

ここで，$(\kappa_1-\kappa_2)\neq 0$，$\omega_{n2}\neq 0$，$X_1{}^{(2)}\neq 0$とすれば，$\cos\phi_2=0$ なので，$\phi_2={}^{\pi}/_{2}$

これを式⑤，式⑥に代入すると

$$X_1{}^{(1)}+X_1{}^{(2)}=1 \quad ------------ ⑨$$

$$\kappa_1X_1{}^{(1)}+\kappa_2X_1{}^{(2)}=0 ------------ ⑩$$

式⑨× κ 2－式⑩より

$(\kappa_2-\kappa_1)X_1{}^{(1)}=\kappa_2$　　これより $-2X_1{}^{(1)}=-1$　したがって，　$X_1{}^{(1)}={}^{1}/_{2}$

式⑨× κ 1－式⑩より

$(\kappa_1-\kappa_2)X_1{}^{(2)}=\kappa_1$　　これより $2X_1{}^{(2)}=1$　したがって，　$X_1{}^{(2)}={}^{1}/_{2}$

したがって，２自由度ばね―質量系の自由振動の一般解は，式④から

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=0.5\sin\left(\omega_{n1}t+\frac{\pi}{2}\right)+0.5\sin\left(\omega_{n2}t+\frac{\pi}{2}\right)\\ x_2(t)&=0.5\sin\left(\omega_{n1}t+\frac{\pi}{2}\right)-0.5\sin\left(\omega_{n2}t+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

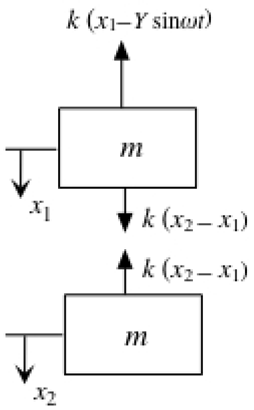
ここで，ω_{n1}，ω_{n2} を代入して書き直すと，次の自由振動の一般解を得る．

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=0.5\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+0.5\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{m}}t\right)\\ x_2(t)&=0.5\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)-0.5\cos\left(\sqrt{\frac{5k}{m}}t\right)\end{aligned}\right\}$$

（注）三角関数の公式　$\sin(\theta+\pi/2)=\cos\theta$

3.4 図 3. 16 は支持部から強制変位励振$Y\sin\omega t$を受ける２自由度ばね―質量系を示す．

運動方程式は右に示す自由物体線図から



$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=k(x_2-x_1)-k(x_1-Y\sin\omega t)\\ m\ddot{x}_2&=-k(x_2-x_1)\end{aligned}\right\}$$

これを行列形式に書き直すと

$$\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}kY\sin\omega t\\0\end{Bmatrix} \text{ ---------- } ①$$

上式から，この系では $kY\sin\omega t$ の強制外力が上部の質量 m に作用することが分かるので，強制振動の特殊解を以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \qquad \text{-------------} \quad ②$$

この式②を，運動方程式①に代入すると

$$\begin{bmatrix}2k-m\omega^2&-k\\-k&k-m\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}kY\\0\end{Bmatrix} \text{ ------------- } ③$$

したがって，この連立方程式③を変位振幅 X_1, X_2 について解けばよい．

左辺の逆行列を求める（**付録 A3-10**）と

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} kY \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(2k-m\omega^2)(k-m\omega^2)-k^2} \begin{bmatrix} k-m\omega^2 & k \\ k & 2k-m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} kY \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + k^2} \begin{Bmatrix} (k-m\omega^2)kY \\ k^2 Y \end{Bmatrix}$$

と特殊解の振幅が求められる．ここで変位振幅 X_1, X_2 を，$\omega_n^2 = k/m$とおいて整理すると

$$X_1 = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)\,Y}{\omega^4 - 3\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4}\ , \qquad X_2 = \frac{\omega_n^4\,Y}{\omega^4 - 3\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4}$$

となり，強制振動の特殊解が得られる．

$$x_1(t) = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)\,Y}{\omega^4 - 3\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4}\sin\omega t, \qquad x_2(t) = \frac{\omega_n^4\,Y}{\omega^4 - 3\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4}\sin\omega t$$

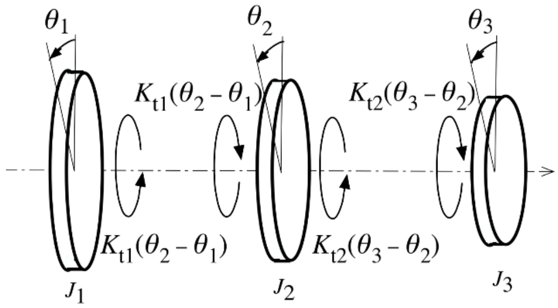
もし，強制変位の励振角振動数ωが変位振幅の分母を 0 とする 2 つの固有角振動数 ω_{n1}, ω_{n2}

$$\left.\begin{aligned} \omega_{n1} &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\cdot\omega_n = 0.618\,\omega_n \quad &\text{（1 次固有角振動数）} \\ \omega_{n2} &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\cdot\omega_n = 1.618\,\omega_n \quad &\text{（2 次固有角振動数）} \end{aligned}\right\}$$

のどちらかに一致した場合には，共振を生じる．

3.5 これは，3 つの円板が 2 つの軸で結合されている回転系である．モータやタービンロータなどの回転体の結合軸系のモデルを表している． 3 自由度の円板軸の回転系の運動方程式を，自由物体線図から導出する．ねじり角θ は軸の正方向について，右ねじ（時計）方向を正とする．

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= K_{t1}(\theta_2-\theta_1) \\ J_2\ddot{\theta}_2 &= -K_{t1}(\theta_2-\theta_1) + K_{t2}(\theta_3-\theta_2) \\ J_3\ddot{\theta}_3 &= -K_{t2}(\theta_3-\theta_2) \end{aligned}\right\}$$



上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{t1} & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1}+K_{t2} & -K_{t2} \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-----------} \quad ①$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{----------} \quad ②$$

式②を運動方程式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} K_{t1}-J_1\omega^2 & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1}+K_{t2}-J_2\omega^2 & -K_{t2} \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2}-J_3\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-----------} \quad ③$$

上式の係数行列式＝0 とおくと，次の振動数方程式を得る（行列式の展開公式は，**付録 A3-9** を参照）

$$(K_{t1}-J_1\omega^2)(K_{t1}+K_{t2}-J_2\omega^2)(K_{t2}-J_3\omega^2)-K_{t1}^2(K_{t2}-J_3\omega^2)-K_{t2}^2(K_{t1}-J_1\omega^2)=0$$

上式の括弧を展開して整理すると（途中経過は省略）

$$\omega^2\{J_1J_2J_3\omega^4-(K_{t2}J_1J_2+K_{t2}J_1J_3+K_{t1}J_2J_3+K_{t1}J_1J_3)\omega^2+K_{t1}K_{t2}(J_1+J_2+J_3)\}=0$$

となる．この振動数方程式は 3 根を持ち，そのうちの 1 つは$\omega_{n0}=0$ である．これを固有値問題③に代入すると，$\Theta_1^{(0)}=\Theta_2^{(0)}=\Theta_3^{(0)}=1$ を得る．このねじり振動モードは剛体モードを表す（3 つの円板が同一方向で同一角度振幅で回転する）．残りの 2 根が 1 次および 2 次のねじり振動モードとなり，固有角振動数はω^2に関する 2 次方程式の解の公式（**付録 A4**）から

ω_{n1}^2，$\omega_{n2}^2=$

$$\frac{\{K_{t1}(J_2J_3+J_1J_3)+K_{t2}(J_1J_2+J_1J_3)\}\mp\sqrt{\{K_{t1}(J_2J_3+J_1J_3)+K_{t2}(J_1J_2+J_1J_3)\}^2-4J_1J_2J_3(J_1+J_2+J_3)K_{t1}K_{t2}}}{2J_1J_2J_3}$$

となる．ここに，題意より

$J_1=10\ (\mathrm{kg\cdot m^2})$，$J_2=5\ (\mathrm{kg\cdot m^2})$，$J_3=8\ (\mathrm{kg\cdot m^2})$，$K_{t1}=5\,000(\mathrm{Nm})$，$K_{t2}=2000\ (\mathrm{Nm})$

を代入する．$J_1J_2J_3=400$，$J_1+J_2+J_3=23$，$J_2J_3+J_1J_3=120$，$J_1J_2+J_1J_3=130$ より

$$\omega_{n1}^2=\frac{5\times120+2\times130-\sqrt{(5\times120+2\times130)^2-4\times400\times23\times5\times2}}{2\times400}\times10^3=313.01$$

$$\omega_{n1}=17.692=17.7\ \ (\mathrm{rad/s})$$

$$\omega_{n2}^2=\frac{860+\sqrt{860^2-368000}}{800}\times10^3=1836.99$$

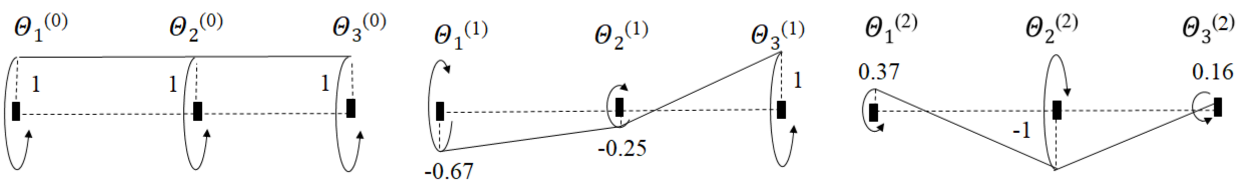
$$\omega_{n2}=42.860=42.9\ \ (\mathrm{rad/s})$$

なお，固有振動モードは固有値（固有角振動数）を固有値問題③に代入して連立方程式を解いて求める．数値的に求めた 0 次モード（剛体モード）から 2 次モードまでの角度振幅比の結果は

$$\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(0)}\\ \Theta_2^{(0)}\\ \Theta_3^{(0)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\Theta_1^{(1)}\\ \Theta_2^{(1)}\\ \Theta_3^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.674\\-0.252\\1.\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\Theta_1^{(2)}\\ \Theta_2^{(2)}\\ \Theta_3^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.374\\-1.\\0.158\end{Bmatrix}$$

となる．１次，２次モードでは最大ねじり角度振幅を 1 として正規化している．

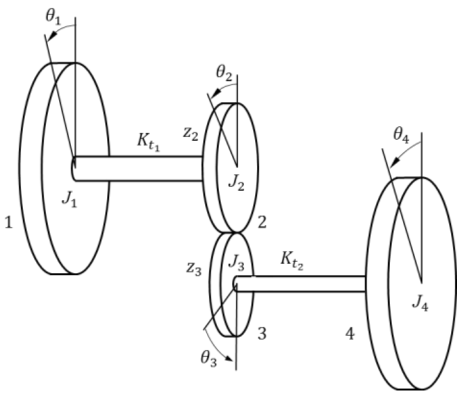
0 次ねじり振動モード　　1 次ねじり振動モード　　2 次ねじり振動モード

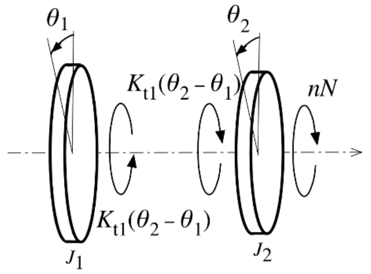


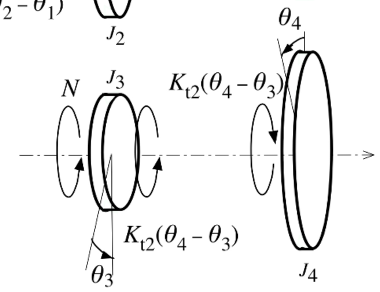
3.6　歯車 2 の歯数をz_2，歯車 3 の歯数をz_3として，歯数比を$z_2 : z_3 = n : 1$とおく．これによって円板 2 および円板 3 の回転角の比は，$\theta_3 = n\theta_2$とおける．また，円板 4 の回転角θ_4をねじりばね定数K_{t1}の軸の回転角に換算した回転角をθ_4'とおくと，$\theta_4 = n\theta_4'$の関係になる．ここでの解答は，歯数比の負号を除いて導いている．結果は教科書の略解と同じになる．

歯車 3 にかかるトルクをNとする．各歯車軸の回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned}
J_1\ddot{\theta}_1 &= K_{t1}(\theta_2-\theta_1) &&------- ① \\
J_2\ddot{\theta}_2 &= -K_{t1}(\theta_2-\theta_1) - nN &&------- ② \\
J_3\ddot{\theta}_3 &= K_{t2}(\theta_4-\theta_3) + N &&------ ③ \\
J_4\ddot{\theta}_4 &= -K_{t2}(\theta_4-\theta_3) &&------- ④
\end{aligned}\right\}$$







円板 2 と円板 3 の回転の運動方程式②，③をまとめる．

先ず，Nを消去して

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -K_{t1}(\theta_2-\theta_1) - n\{J_3\ddot{\theta}_3 - K_{t2}(\theta_4-\theta_3)\}$$

次に，θ_3を消去する際に，θ_4をねじりばね定数K_{t1}の軸についての回転角に変換する必要がある．

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -K_{t1}(\theta_2-\theta_1) - n^2\{J_3\ddot{\theta}_2 - K_{t2}(\theta_4'-\theta_2)\}$$

となる．これを整理すると

$$(J_2+n^2J_3)\ddot{\theta}_2 + K_{t1}(\theta_2-\theta_1) + n^2K_{t2}(\theta_2-\theta_4') = 0$$

となる．円板 4 の運動方程式④もねじりばね定数K_{t1}の軸についての回転の運動方程式に変換すると

$n^2J_4\ddot{\theta}_4' + n^2K_{t2}(\theta_4'-\theta_2) = 0$（形式的に n^2 を両辺に乗じる）

したがって，この歯車軸を含む系の回転の運動方程式は，

$$\left.\begin{aligned}
&J_1\ddot{\theta}_1 - K_{t1}(\theta_2-\theta_1) = 0 \\
&(J_2+n^2J_3)\ddot{\theta}_2 + K_{t1}(\theta_2-\theta_1) + n^2K_{t2}(\theta_2-\theta_4') = 0 \\
&n^2J_4\ddot{\theta}_4' + n^2K_{t2}(\theta_4'-\theta_2) = 0
\end{aligned}\right\}$$

上式の運動方程式を行列形式で表すと，次のようになる．

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2+n^2J_3 & 0 \\ 0 & 0 & n^2J_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}'_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{t1} & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1}+n^2K_{t2} & -n^2K_{t2} \\ 0 & -n^2K_{t2} & n^2K_{t2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ここで，上式において以下のように

慣性行列$[M]$の（2 行 2 列成分）$J_2+n^2J_3 \to J_2$　（3 行 3 列成分）$n^2J_4 \to J_3$

剛性行列$[K]$の（2 行 2 列，2 行 3 列，3 行 2 列，3 行 3 列成分）$n^2K_{t2} \to K_{t2}$

回転角加速度ベクトル｛$\ddot{\theta}$｝の第 3 成分　$\ddot{\theta}'_4 \to \ddot{\theta}_3$

回転角ベクトル｛θ｝の第 3 成分　$\theta_4' \to \theta_3$

とおくと，前問の**[演習問題 3.5]**の 3 つの円板軸の回転の運動方程式①と等価となる．

3.7　2 自由度ねじり振動系の自由振動の一般解を，初期条件によって決定する．

与えられた初期条件は，$\theta_1(0)=0$，$\dot{\theta}_1(0)=1$，$\theta_2(0)=0$，$\dot{\theta}_2(0)=1$である．円板 1 ，2 の固有角振動数および角度振幅比は教科書(**p.80**)から，以下のように導ける（$\omega_{n1}<\omega_{n2}$）．

$${\omega_{n1}}^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{K_t}{J}=0.382\frac{K_t}{J}\ ,\quad {\omega_{n2}}^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{K_t}{J}=2.618\frac{K_t}{J}$$

1 次，2 次モードの固有角振動数 $\omega_{n1}=0.618\omega_t$，$\omega_{n2}=1.618\omega_t$　　ここで　$\omega_t=\sqrt{\frac{K_t}{J}}$

1 次，　2 次モードの角度振幅比

$$\frac{{\Theta_2}^{(1)}}{{\Theta_1}^{(1)}}=\frac{K_t}{K_t-J{\omega_{n1}}^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618=\kappa_1\ ,\qquad \frac{{\Theta_2}^{(2)}}{{\Theta_1}^{(2)}}=\frac{K_t}{K_t-J{\omega_{n2}}^2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.618=\kappa_2$$

したがって，自由ねじり振動の一般解は 1 次と 2 次の固有振動モードを重ね合わせて，次のように表せる．

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(t)&={\Theta_1}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\phi_1)+{\Theta_1}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\phi_2)\\ \theta_2(t)&={\Theta_2}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\phi_1)+{\Theta_2}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\phi_2)\end{aligned}\right\}\ \text{-------------}\quad ①$$

上記の角度振幅比κ_1,κ_2を使用して，上式の第 2 式を書き直すと

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(t)&={\Theta_1}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\phi_1)+{\Theta_1}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\phi_2)\\ \theta_2(t)&=\kappa_1{\Theta_1}^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\phi_1)+\kappa_2{\Theta_1}^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\phi_2)\end{aligned}\right\}\ \text{-------------}\quad ②$$

上の両式を時間 t について微分して角速度を求めると

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}_1(t)&={\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}\cos(\omega_{n1}t+\phi_1)+{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}\cos(\omega_{n2}t+\phi_2)\\ \dot{\theta}_2(t)&=\kappa_1{\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}\cos(\omega_{n1}+\phi_1)+\kappa_2{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}\cos(\omega_{n2}t+\phi_2)\end{aligned}\right\}$$

初期条件 $\theta_1(0)=0$，$\dot{\theta}_1(0)=1$，$\theta_2(0)=0$，$\dot{\theta}_2(0)=1$ を代入すると

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(0)&={\Theta_1}^{(1)}\sin\phi_1+{\Theta_1}^{(2)}\sin\phi_2=0 &&③\\ \theta_2(0)&=\kappa_1{\Theta_1}^{(1)}\sin\phi_1+\kappa_2{\Theta_1}^{(2)}\sin\phi_2=0 &&④\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}_1(0)&={\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}\cos\phi_1+{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}\cos\phi_2=1 &&⑤\\ \dot{\theta}_2(0)&=\kappa_1{\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}\cos\phi_1+\kappa_2{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}\cos\phi_2=1 &&⑥\end{aligned}\right\}$$

を得る．上記の連立方程式から 4 つの未知定数${\Theta_1}^{(1)}$，${\Theta_1}^{(2)}$，ϕ_1，ϕ_2を決定する．

③$\times\kappa_2-$④を計算して

$$(\kappa_2-\kappa_1){\Theta_1}^{(1)}\sin\phi_1=0$$

ここで，$(\kappa_2-\kappa_1)\neq 0$ ${\Theta_1}^{(1)}\neq 0$とすれば，$\sin\phi_1=0$なので，$\phi_1=0$ となる．

③$\times\kappa_1-$④を計算して

$$(\kappa_1-\kappa_2){\Theta_1}^{(2)}\sin\phi_2=0$$

ここで，$(\kappa_1-\kappa_2)\neq 0$ ${\Theta_1}^{(2)}\neq 0$とすれば，$\sin\phi_2=0$なので，$\phi_2=0$ となる．

これらを⑤および⑥に代入すると

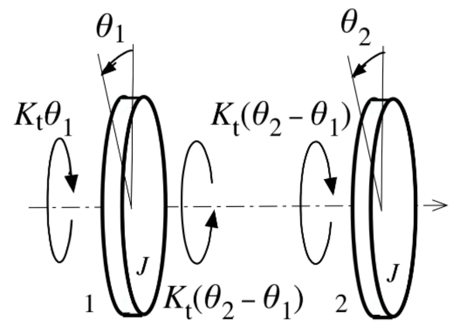
$$\left.\begin{aligned}&{\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}+{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}=1 &&⑦\\ &\kappa_1{\Theta_1}^{(1)}\omega_{n1}+\kappa_2{\Theta_1}^{(2)}\omega_{n2}=1 &&⑧\end{aligned}\right\}$$

⑦$\times\kappa_2-$⑧より

$$(\kappa_2-\kappa_1)\omega_{n1}{\Theta_1}^{(1)}=\kappa_2-1$$

したがって

$$ {\Theta_1}^{(1)}=\frac{\kappa_2-1}{(\kappa_2-\kappa_1)\omega_{n1}} \qquad ⑨$$



⑦$\times\kappa_1-$⑧より

$$(\kappa_1-\kappa_2)\omega_{n2}{\Theta_1}^{(2)}=\kappa_1-1$$

したがって

$$ {\Theta_1}^{(2)}=\frac{\kappa_1-1}{(\kappa_1-\kappa_2)\omega_{n2}} \qquad ⑩$$

となる．$\kappa_1=1.618$，$\kappa_2=-0.618$，$\omega_{n1}=0.618\omega_t$，$\omega_{n2}=1.618\omega_t$を式⑨，⑩と 1 次，2 次モードの角度振幅比に代入すると，円板 1 ，2 のそれぞれの 1 次，2 次モードの角度振幅が求まる．

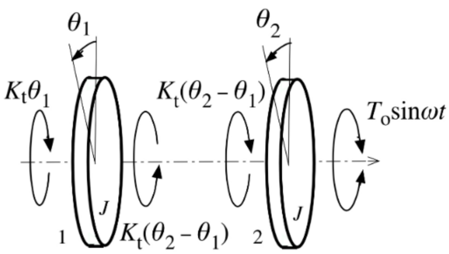
$$\Theta_1^{(1)}=\frac{1.171}{\omega_t},\qquad \Theta_1^{(2)}=\frac{0.171}{\omega_t},\qquad \Theta_2^{(1)}=\kappa_1\Theta_1^{(1)}=\frac{1.895}{\omega_t},\qquad \Theta_2^{(2)}=\kappa_2\Theta_1^{(2)}=-\frac{0.106}{\omega_t}$$

これらより，2 自由度系の自由ねじり振動の一般解は，式①または式②から次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(t)&=\tfrac{1.171}{\omega_t}\sin(0.618\omega_t t)+\tfrac{0.171}{\omega_t}\sin(1.618\omega_t t)\\ \theta_2(t)&=\tfrac{1.895}{\omega_t}\sin(0.618\omega_t t)-\tfrac{0.106}{\omega_t}\sin(1.618\omega_t t)\end{aligned}\right\}$$

3.8 2 自由度ねじり振動系の強制振動の特殊解を求める．円板 1 ，2 の運動方程式は自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned}J\ddot{\theta}_1&=-K_t\theta_1+K_t(\theta_2-\theta_1)\\ J\ddot{\theta}_2&=-K_t(\theta_2-\theta_1)+T_0\sin\omega t\end{aligned}\right\}$$



上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix}J&0\\0&J\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2K_t&-K_t\\-K_t&K_t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\T_0\sin\omega t\end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad ①$$

強制振動の特殊解を以下のように仮定して，式①に代入する．

$$\begin{Bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \qquad \text{----------} \quad ②$$

（理由：減衰項がなくて，外力トルクが正弦関数$\sin\omega t$のみであるため）

$$\begin{bmatrix}2K_t-J\omega^2&-K_t\\-K_t&K_t-J\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\T_0\end{Bmatrix}$$

上式の左辺の逆行列（**付録 A3-10**）を求めると

$$\begin{Bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2K_t-J\omega^2&-K_t\\-K_t&K_t-J\omega^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\T_0\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(2K_t-J\omega^2)(K_t-J\omega^2)-K_t^2}\begin{bmatrix}K_t-J\omega^2&K_t\\K_t&2K_t-J\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\T_0\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{J^2\omega^4 - 3K_tJ\omega^2 + K_t^2}\begin{Bmatrix} K_tT_0 \\ (2K_t - J\omega^2)T_0 \end{Bmatrix}$$

と角度振幅が求められる．したがって，強制ねじり振動の特殊解は式②から

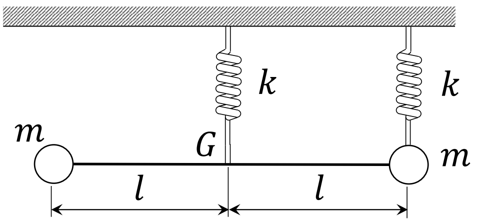
$$\left.\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{K_tT_0}{J^2\omega^4 - 3K_tJ\omega^2 + K_t^2}\sin\omega t \\ \theta_2(t) &= \frac{(2K_t - J\omega^2)T_0}{J^2\omega^4 - 3K_tJ\omega^2 + K_t^2}\sin\omega t \end{aligned}\right\}$$

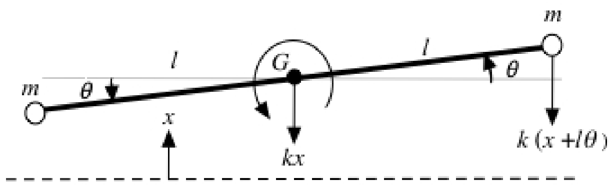
となる．もし，外力トルクの励振角振動数ωが角度振幅の分母を 0 とする 2 つの固有角振動数

$$\left.\begin{aligned} \omega_{n1} &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{K_t}{J}} = 0.618\sqrt{\frac{K_t}{J}} \quad \text{（1 次固有角振動数）} \\ \omega_{n2} &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{K_t}{J}} = 1.618\sqrt{\frac{K_t}{J}} \quad \text{（2 次固有角振動数）} \end{aligned}\right\}$$

のどちらかに一致した場合には，共振を生じる．

3.9 並進と回転が連成した剛体棒の 2 自由度系の固有振動数と固有振動モード（振幅比）を求める．静的つり合い位置からの剛体棒の重心 G の変位と回転角を考える．





ここでは，右図のように重心 G の上方向変位をx，反時計回り回転角度をθと座標をおく．

重心 G 回りの並進と回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned} 2m\ddot{x} &= -kx - k(x + l\theta) \\ J\ddot{\theta} &= -k(x + l\theta)l \end{aligned}\right\}$$

ただし，$J = 2ml^2$（重心 G 回りの慣性モーメント）である．上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & kl \\ kl & kl^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{------------} \quad ①$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{-------------} \quad ②$$

（理由：減衰がなく，正弦関数と余弦関数の合成から$\sin(\omega t + \phi)$と表現できるため）

式②を式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & kl \\ kl & kl^2 - 2ml^2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{------------} \quad ③$$

上式の係数行列式=0 とすると，次の振動数方程式を得る．

$$(2k-2m\omega^2)(kl^2-2ml^2\omega^2)-k^2l^2=0$$

展開して整理すると

$$4m^2l^2\omega^4-6mkl^2\omega^2+k^2l^2=l^2(4m^2\omega^4-6mk\omega^2+k^2)=0$$

$l\neq 0$ なので，上式の括弧内のω^2に関する 2 次方程式を，解の公式（**付録 A4**）より求めると

$$\omega^2=\frac{3mk\mp\sqrt{9m^2k^2-4m^2k^2}}{4m^2}=\frac{3\mp\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{k}{m}$$

となるため，固有角振動数を $\omega_{n1}<\omega_{n2}$ として

$$\left.\begin{aligned}\omega_{n1}&=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{k}{m}}=0.4370\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad\text{（1 次固有角振動数）}\\ \omega_{n2}&=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{k}{m}}=1.1441\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad\text{（2 次固有角振動数）}\end{aligned}\right\}$$

固有振動モード（振幅比）は，それぞれの固有角振動数を固有値問題③に代入すればよい．

1）1 次モード：$\omega^2=\omega_{n1}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

$$\left\{2k-2m\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\frac{k}{m}\right\}X^{(1)}+kl\Theta^{(1)}=0$$

したがって，振幅比は

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}}=-\frac{2l}{1+\sqrt{5}}=-0.618l\qquad\text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}X^{(1)}\\ \Theta^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.618l\\ 1\end{Bmatrix}$$

2）2 次モード：$\omega^2=\omega_{n2}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

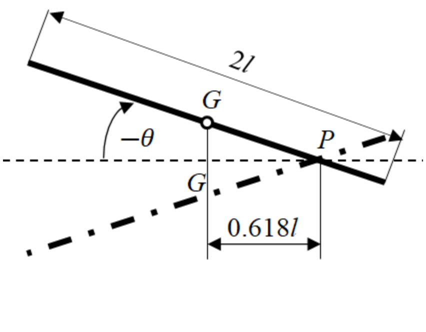
$$\left\{2k-2m\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)\frac{k}{m}\right\}X^{(2)}+kl\Theta^{(2)}=0$$

したがって，振幅比は

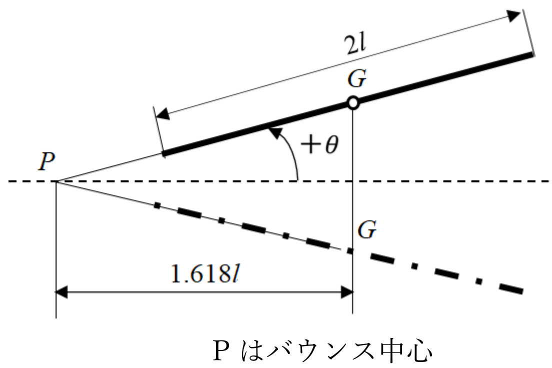
$$\frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}}=\frac{2l}{\sqrt{5}-1}=1.618l\qquad\text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}X^{(2)}\\ \Theta^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.618l\\ 1\end{Bmatrix}$$

1 次，2 次の固有振動モードは以下のようになる．点 P は固有振動モードの節となる．

1 次振動モード（ピッチングモード）　　2 次振動モード（バウンシングモード）



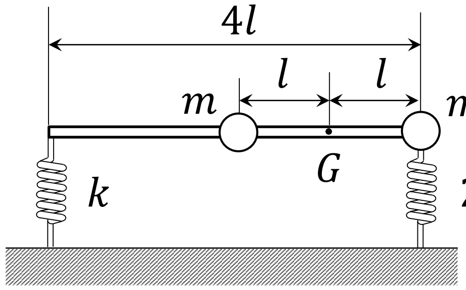
P はピッチ中心
(節 P は重心 G より右側に位置)

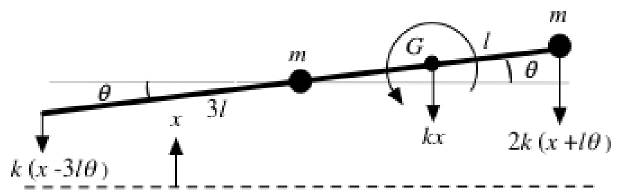


P はバウンス中心
(節 P は重心 G より左側に位置)

3.10 並進と回転が連成した剛体棒の固有振動数と固有振動モード（振幅比）を求める．

静的つり合い位置からの剛体棒の重心 G の変位と回転角を考える．





ここでは，右図のように重心の上方向変位をx，反時計回り回転角度をθと座標をとる．

剛体棒の重心 G 回りの並進と回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$\left.\begin{aligned}2m\ddot{x} &= -2k(x+l\theta) - k(x-3l\theta)\\ J\ddot{\theta} &= -2k(x+l\theta)l + k(x-3l\theta)\cdot 3l\end{aligned}\right\}$$

ただし，$J = 2ml^2$（重心 G 回りの慣性モーメント）である．上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & 2ml^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}3k & -kl\\ -kl & 11kl^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \text{-----------------} \quad ①$$

自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix}x(t)\\ \theta(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}X\\ \Theta\end{Bmatrix}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{-----------------}②$$

式②を式①に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix}3k-2m\omega^2 & -kl\\ -kl & 11kl^2-2ml^2\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X\\ \Theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \text{-----------------}③$$

上式の係数行列式=0 とすると，次の振動数方程式を得る．

$$(3k-2m\omega^2)(11kl^2-2ml^2\omega^2) - k^2l^2 = 0$$

展開して整理する．

$$4m^2l^2\omega^4 - 28mkl^2\omega^2 + 32k^2l^2 = 4l^2(m^2\omega^4 - 7mk\omega^2 + 8k^2) = 0$$

$l \neq 0$ なので，上式の括弧内のω^2に関する 2 次方程式を，解の公式（**付録 A4**）によって解くと

$$\omega^2 = \frac{7mk \mp \sqrt{49m^2k^2 - 32m^2k^2}}{2m^2} = \frac{7 \mp \sqrt{17}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

となる．上式から，固有角振動数を $\omega_{n1} < \omega_{n2}$ として

$$\left.\begin{aligned}\omega_{n1} &= \sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 1.199\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{（1 次固有角振動数）}\\ \omega_{n2} &= \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{k}{m}} = 2.358\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{（2 次固有角振動数）}\end{aligned}\right\}$$

固有振動モード（振幅比）は，それぞれの固有角振動数を固有値問題③に代入して求める．

1）1 次モード： $\omega^2 = \omega_{n1}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

$$\left\{3k-2m\left(\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)\frac{k}{m}\right\}X^{(1)}-kl\Theta^{(1)}=0$$

よって，振幅比は

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}}=\frac{l}{\sqrt{17}-4}=\left(4+\sqrt{17}\right)l=8.123l \quad \text{すなわち} \quad \begin{Bmatrix}X^{(1)}\\ \Theta^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}8.123l\\ 1\end{Bmatrix}$$

2）2 次モード：$\omega^2=\omega_{n2}^2$を式③の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

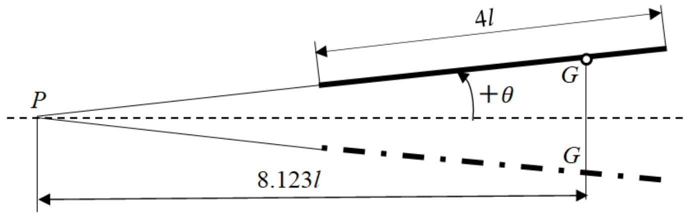
$$\left\{3k-2m\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)\frac{k}{m}\right\}X^{(2)}-kl\Theta^{(2)}=0$$

よって，振幅比は

$$\frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}}=-\frac{l}{\sqrt{17}+4}=\left(4-\sqrt{17}\right)l=-0.123l \quad \text{すなわち} \quad \begin{Bmatrix}X^{(2)}\\ \Theta^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.123l\\ 1\end{Bmatrix}$$

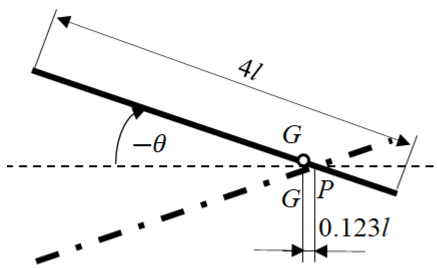
（注）1 次，2 次の固有振動モードは以下のようになり，点 P は固有振動モードの節となる．

1 次振動モード（バウンシングモード）



P はバウンス中心（節 P は重心 G よりも左側に位置）

2 次振動モード（ピッチングモード）



P はピッチ中心（節 P は重心 G よりも右側に位置）