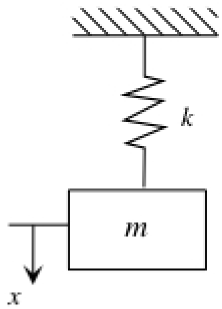
[演習問題 2]

2.1 1 自由度ばねー質量系の固有角振動数ω_n (rad/s)と周期T (s)を求める．それぞれの定義式は，**式(2.11)**，**式(2.12)**で与えられる．単位換算に注意して定義式に代入する．

(1) $m = 1$ (kg)，$k = 100$ (N/m)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{100} = 10.0 \ \text{(rad/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0.628 = 0.63 \ \text{(s)}$$



(2) $m = 5$ (kg)，$k = 100$ (N/cm)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10000}{5}} = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5} = 44.72 \ \text{(rad/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20\sqrt{5}} = \frac{\pi}{10\sqrt{5}} = 0.1404 = 0.14 \ \text{(s)}$$

(3) $m = 10$ (kg)，$k = 10$ (kgf/m)

$k = 10g$ (N/m),　ここで $g = 9.81 (\text{m/s}^2)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10g}{10}} = \sqrt{g} = 3.13 \ \text{(rad/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2.01 \ \text{(s)}$$

(4) $m = 50$ (kg)，$k = 10$ (kgf/cm)

$k = 1000g$ (N/m),　ここで $g = 9.81 \ (\text{m/s}^2)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000g}{50}} = \sqrt{20g} = 14.00 \ \text{(rad/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{20g}} = 0.449 = 0.45 \ \text{(s)}$$

2.2 ばね-質量-ダッシュポット系の減衰固有角振動数 f_dと減衰比 ζ を求める．

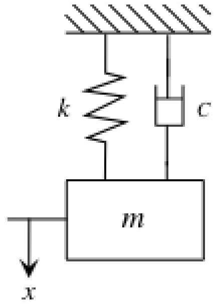
式(2.11)と減衰比と減衰固有角振動数の定義（p.41）から

固有角振動数：$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s)

減衰比：$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$（無次元）

減衰固有角振動数：$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ (rad/s)

減衰固有振動数：$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$ (Hz)



単位に注意して与えられた数値を，定義式に代入する．

(1) $m = 1$ (kg), $k = 100$ (N/m), $c = 10$ (Ns/m),

$$\omega_n = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \ \text{(rad/s)}, \quad \zeta = \frac{10}{2\sqrt{1\times 100}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\omega_d = \sqrt{1-0.5^2}\times 10 = 5\sqrt{3} \ \text{(rad/s)}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{5\sqrt{3}}{2\pi} = 1.378 = 1.38 \ \text{(Hz)}$$

(2) $m = 5$ (kg), $k = 10$ (N/cm), $c = 0.1$ (Ns/cm),

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1000}{5}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \ \text{(rad/s)}, \quad \zeta = \frac{10}{2\sqrt{5\times 1000}} = \frac{\sqrt{2}}{20} = 0.07071$$

$$\omega_d = \sqrt{1-0.07071^2}\times 10\sqrt{2} = 14.1067 \ \text{(rad/s)}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{14.1067}{2\pi} = 2.245 = 2.25 \ \text{(Hz)}$$

(3) $m = 1$(kg), $k = 10$ (kgf/m), $c = 0.1$ (kgfs/m),

$$k = 10g\ \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right), \ c = 0.1g \ \text{(Ns/m)}, \ \text{ここで} \ g = 9.81 \ (\text{m/s}^2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{10g}{1}} = \sqrt{10g} = 9.9045 \ \text{(rad/s)}, \quad \zeta = \frac{0.1g}{2\sqrt{1\times 10g}} = 0.0495$$

$$\omega_d = \sqrt{1-0.0495^2}\times\sqrt{10g} = 9.8924 \ \text{(rad/s)}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{9.8924}{2\pi} = 1.5744 = 1.57 \ \text{(Hz)}$$

(4) $m = 5$ (kg), $k = 10$ (kgf/cm), $c = 0.1$ (kgfs/m),

$$k = 1000g\ \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right), \ c = 0.1g \ \text{(Ns/m)}, \ \text{ここで} \ g = 9.81 \ (\text{m/s}^2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1000g}{5}} = \sqrt{200g} = 44.294 \ \text{(rad/s)}, \quad \zeta = \frac{0.1g}{2\sqrt{5\times 1000g}} = 2.215\times 10^{-3} = 0.0022$$

$$\omega_d = \sqrt{1-0.002215^2}\times\sqrt{200g} = 44.294 \ \text{(rad/s)}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{44.294}{2\pi} = 7.0497 = 7.05 \ \text{(Hz)}$$

2.3 ばね-質量系で付加質量Δmによる固有振動数の変化から，系のばね定数 k と質量 m を求める．

固有角振動数　**式(2.11)** $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s)，固有振動数　**式(2.13)** $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ (Hz) で定義される．

質量m (kg)の時 $f_n = 3.2$ (Hz)，mに$\Delta m = 5$ (kg)を付加すると，$f_n{}' = 2.5$ (Hz)となるため
次式が成り立つ．

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 3.2 \ \text{(Hz)} \quad \text{----------} \quad ① \qquad f_n{}' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}} = 2.5 \ \text{(Hz)} \quad \text{----------} \quad ②$$

式①/式② として

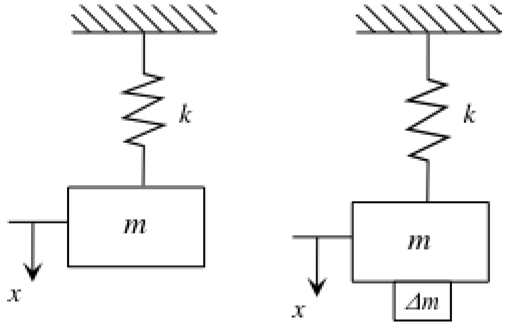
$$\sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}} = \frac{f_n}{f_n{}'}$$

上式の両辺を 2 乗すると，次のようになる．

$$\left(\frac{f_n}{f_n{}'}\right)^2 = \frac{m+\Delta m}{m}$$

これを整理して m について解くと

$$m = \frac{\Delta m}{\left(\frac{f_n}{f_n{}'}\right)^2 - 1} = \frac{5}{\left(\frac{3.2}{2.5}\right)^2 - 1} = 7.832 = 7.8 \ \text{(kg)}$$



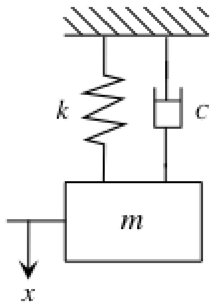
$f_n = 3.2$ Hz,　$f_n{}' = 2.5$ Hz

ばね定数は式①より，次のように求まる．

$$k = m(2\pi f_n)^2 = 7.832 \times (2 \times \pi \times 3.2)^2 = 3166.16 \ \text{(N/m)} = 3.17 \ \text{(kN/m)}$$

2.4 ばね-質量-ダッシュポット系の減衰比ζと対数減衰率δを，定義式に従って求める．

質量 $m = 10$ (kg)，ばね定数 $k = 10$ (kN/m)，減衰係数 $c = 100$ (Ns/m) を次式に代入する．

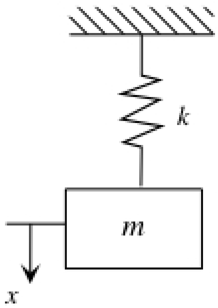


減衰比：　$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{100}{2\sqrt{10\times10000}} = 0.158$

対数減衰率　**式(2.36)**：$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\times0.158}{\sqrt{1-0.158^2}} = 1.005$

2.5 ばね-質量系の運動方程式の自由振動の一般解を，**式(2.9)**，**式(2.10)**を利用して求めてもよい．ここで初期条件は両問とも，$x(0) = 0.1$ (m)，$\dot{x}(0) = 0.01$ (m/s)である．

(1)　$m = 1$ (kg)，$k = 100$ (N/m)



$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{100/1} = 10$ (rad/s)

$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + B_1 \sin\omega_n t$

$\dot{x}(t) = -A_1\omega_n \sin\omega_n t + B_1\omega_n \cos\omega_n t$

上式に初期条件を代入して，任意定数 A_1, B_1 を決定する．

$x(0) = A_1 \cos 10\cdot0 + B_1 \sin 10\cdot0 = A_1 = 0.1$ (m)

$\dot{x}(0) = -A_1\omega_n \sin 10\cdot0 + B_1\omega_n \cos 10\cdot0 = B_1\omega_n = 0.01$ (m/s)

すなわち，$B_1 = \dot{x}(0)/\omega_n = 0.01/10 = 0.001$ (m)

よって，自由振動の一般解は

$x(t) = 0.1\cos 10t + 0.001\sin 10t$ (m)

この形式の解でもよいが，合成関数(**付録 A2.1–5**)を求めると

$x(t) = \sqrt{0.1^2 + \left(\frac{0.01}{10}\right)^2}\sin(10t+\phi)$，ここで，　$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{10\times0.1}{0.01}\right) = 1.56$

すなわち，　$x(t) = 0.1000\sin(10t + 1.56)$ (m)

(2) $m = 5$ (kg)，$k = 5$ (N/m)

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{5/5} = 1 \text{ (rad/s)}$$

(1)の場合と同様に初期条件から任意定数 A_1, B_1 を決定する．

$$x(0) = A_1 \cos 1 \cdot 0 + B_1 \sin 1 \cdot 0 = A_1 = 0.1 \text{ (m)}$$

$$\dot{x}(0) = -A_1 \omega_n \sin 1 \cdot 0 + B_1 \omega_n \cos 1 \cdot 0 = B_1 \omega_n = 0.01 \text{ (m/s)}$$

すなわち，$B_1 = \dot{x}(0)/\omega_n = 0.01/1 = 0.01$ (m)

よって，自由振動の一般解は

$$x(t) = 0.1 \cos t + 0.01 \sin t \text{ (m)}$$

となる．同様に合成関数を求めると，次のように変形できる．

$$x(t) = \sqrt{0.1^2 + \left(\frac{0.01}{1}\right)^2} \sin(t + \phi),\quad \text{ここで，}\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1 \times 0.1}{0.01}\right) = 1.47$$

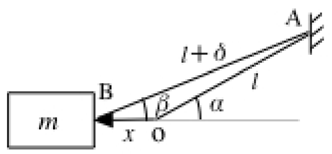
すなわち，$x(t) = 0.1005 \sin(t + 1.47)$ (m)

2.6 質量 m が傾斜ばねに取り付けられていて，その水平方向の運動は微小変位であると仮定する．質量 m が静止位置から左側へ，xだけ移動したときのばねの伸びをδとする．

三角形 OAB において，余弦定理（**付録 A2.1−7**）から

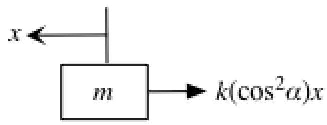
$$(l + \delta)^2 = l^2 + x^2 - 2lx\cos(\pi - \alpha)$$

$$= l^2 + x^2 + 2lx\cos\alpha = l^2\left\{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\cos\alpha\right\}$$



質量 m の微小変位 $(x/l)^2 \ll 1$ を仮定すると，上式から

$$(l + \delta)^2 = l^2\left\{1 + \cancel{\left(\frac{x}{l}\right)^2} + 2\left(\frac{x}{l}\right)\cos\alpha\right\} \cong l^2\left\{1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\cos\alpha\right\}$$



上式の両辺の平方根をとって，近似展開すると

$$l + \delta \cong l\sqrt{1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\cos\alpha} \cong l + x\cos\alpha$$

したがって，傾斜ばねの伸び $\delta = x\cos\alpha$（$0 \leq \alpha \leq 90°$）となる．ばねの復元力は

$$-k\delta = -kx\cos\alpha$$

ばねの伸びδが小さい（$\delta/l \ll 1$）とき，傾斜角は$\beta \cong \alpha$ とみなせるので復元力の水平方向成分は

$$-kx\cos\alpha \cdot \cos\alpha = -(k\cos^2\alpha)x$$

ここで，等価ばね定数 $k_{\text{eq}} = k\cos^2\alpha$となる．質量 m の水平方向（左向きを正方向）の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -(k\cos^2\alpha)x \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + (k\cos^2\alpha)x = 0$$

となり，上式の両辺をmで除すると，次の運動方程式を得る．

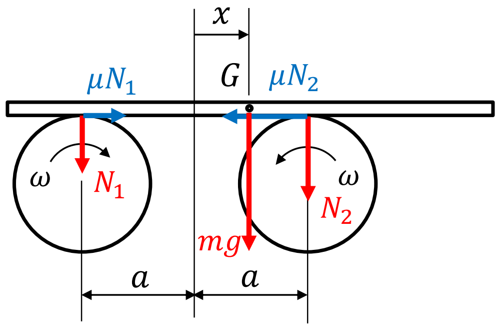
$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\cos^2\alpha\right)x = 0$$

上式と $\ddot{x} + {\omega_n}^2 x = 0$ との係数比較から，この系の固有角振動数は次のように求まる．

$$\omega_n = \cos\alpha\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(注)ばねの復元力の垂直方向の分力は，質量に作用する重力とつり合う（$mg = kx\cos\alpha\cdot\sin\alpha$）

2.7 2 本のローラーが軸心の周りに同一の角速度ωで内向きに回転している．図のように剛体棒の重心がxだけ右に移動すると，左右のローラーに働く垂直荷重に差が生じる．すなわち，左側のローラーに作用する垂直荷重をN_1，右側のローラーに作用する垂直荷重をN_2とする．剛体棒とローラーの間の動摩擦係数をμとする．



左側のローラーの中心軸周りのモーメントのつり合い式

$$mg(a + x) - 2aN_2 = 0 \quad \text{----------} \quad ①$$

右側のローラーの中心軸周りのモーメントのつり合い式

$$-mg(a - x) + 2aN_1 = 0 \quad \text{---------} \quad ②$$

が成立する．これから垂直荷重は，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg(a-x)}{2a} \\ N_2 &= \frac{mg(a+x)}{2a} \end{aligned}\right\}$$

剛体棒はこれらの垂直荷重 N に対する垂直抗力 R を受ける．この垂直抗力（N=R）に動摩擦係数μを乗じると，棒に作用する水平方向の摩擦力（クーロンの摩擦法則）が求められる．

左側のローラーに作用する摩擦力（右向き）は

$$F_1 = \mu N_1 = \mu\frac{mg(a-x)}{2a} \quad \text{----------} \quad ③$$

右側のローラーに作用する摩擦力（左向き）は

$$F_2 = \mu N_2 = \mu\frac{mg(a+x)}{2a} \quad \text{----------} \quad ④$$

これらの摩擦力の差が剛体棒に作用する復元力になる．

$$F = F_1 - F_2 = -\mu\frac{mg}{a}x$$

したがって，剛体棒の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\mu\frac{mg}{a}x \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \mu\frac{mg}{a}x = 0$$

上式の両辺を mで除すると

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{a}x = 0$$

上式と $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ との係数比較から，固有角振動数は次のようになる．

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mu g}{a}}$$

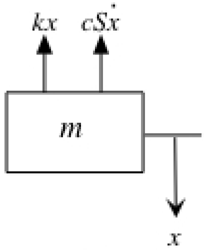
2.8 板の下向き方向の変位をxとする．

液体中の板に働く抵抗力Fが，板の速度$\dot{x}$と板の面積Sに比例すると仮定すれば

$F = c\,S\,\dot{x}$　ここで c：抵抗係数［Ns/m³］

したがって，質量 m の運動方程式は自由物体線図から

$m\ddot{x} = -kx - F$　すなわち　$m\ddot{x} + kx + F = 0$



となる．両辺を m で除して書き直すと次式を得る．

$\ddot{x} + \frac{cS}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$　すなわち　$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

固有角振動数と減衰比はそれぞれ

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，　$\zeta = \frac{cS}{2\sqrt{mk}}$

となる．ここで，空気中の板の非減衰固有周期 T および液体中の板の減衰固有周期 T_d は

$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$ ，　$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$

である．液体中の板の固有周期 T_d は，液体の粘性によって空気中の板の固有周期 T の n 倍となるため，

$nT = T_d$ より　$n\frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$

したがって，上式から n を求めると

$$n = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

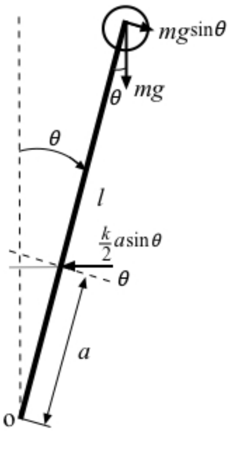
上式から ζ^2 について解くと， $c\,(>0)$ が次のように求まる．

$\zeta^2 = c^2\frac{S^2}{4mk} = \frac{n^2-1}{n^2}$　すなわち　$c = \frac{2\sqrt{mk(n^2-1)}}{nS}$

2.9 剛体棒の質量は無視できるので，その支点 O 回りの慣性モーメントは $J = ml^2$ となる．

倒立振子（質量の重心の位置が支点よりも高い位置にある振り子）では，重力は復元力の反対向きに作用するため，剛体棒の支点 O 回りの回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$J\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - 2\left(\frac{k}{2}a\sin\theta\right) \times a\cos\theta$$



ここで，微小角（θ <<1）と仮定すれば，$\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ なので

$ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta + ka^2\theta = 0$　両辺を ml^2 で除すると

$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0$　→　$\ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0$

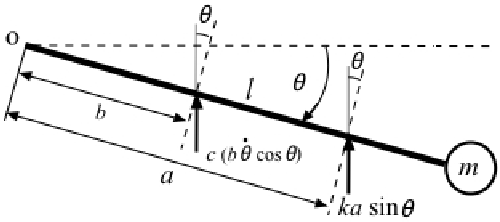
と整理できる．したがって，固有角振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2 - mgl}{ml^2}}$$

となる．ただし，$ka^2 - mgl > 0$ とする．$ka^2 - mgl \leq 0$ の場合には振動しない．

2.10 図 2.41 に示す壁に取り付けられた支点 O 回りの剛体棒の回転運動を考える．剛体棒の質量は先端の集中質量 m と比較して無視できるので, 支点回りの慣性モーメントは $J = ml^2$ である. さらに, 微小角（θ <<1）と仮定すれば $\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ である．したがって，**[演習問題 2.9]**と同様にしてばねの復元力およびダッシュポットの粘性抵抗力から，剛体棒の支点 O 回りの回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$\mathrm{m}l^2\ddot{\theta} = -\mathrm{c}b^2\dot{\theta} - ka^2\theta$$



両辺をml^2で除すると

$$\ddot{\theta} + \frac{\mathrm{c}b^2}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0 \qquad \text{---------} \quad ①$$

上式を，次のように書き直す.

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \qquad \text{---------} \quad ②$$

式①と式②の係数比較から

$$2\zeta\omega_n = \frac{cb^2}{ml^2}\ , \quad {\omega_n}^2 = \frac{ka^2}{ml^2}$$

したがって，固有角振動数と減衰比は，次のように求まる.

$$\omega_n = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \zeta = \frac{b^2c}{2ml^2\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{b^2c}{2al\sqrt{mk}}$$

2.11 図 2.25 の調和励振力を受けるばね–質量–ダッシュポット系の近似共振点$\omega/\omega_n \cong 1$での変位振幅は，$X = 15\ \mathrm{mm}$である．まず振幅倍率に関する**式(2.71)**から

$$M(\frac{\omega}{\omega_n} = 1) = \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{2\zeta} \qquad \text{----------} \quad ①$$

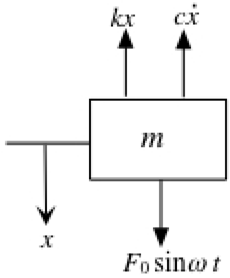
となる．質量 $m = 100$ (kg)，励振力の振幅 $F_0 = 200$ (N)，励振振動数 $f = 5$ (Hz)，すなわち励振角振動数は$\omega = 2\pi f = 10\pi$ (rad/s)である．また，近似共振点$\omega/\omega_n \cong 1$であることから，固有角振動数は $\omega_n = 10\pi$ (rad/s)である．これからばね定数は

$$k = m\omega_n^2 = 100 \times (10\pi)^2 = 98.7 \times 10^3\ (\mathrm{N/m})$$

さらにばねの静的変位は

$$X_{st} = F_0/k = 200/(98.7 \times 10^3)\ (\mathrm{m})$$

となるため，式①から減衰比は



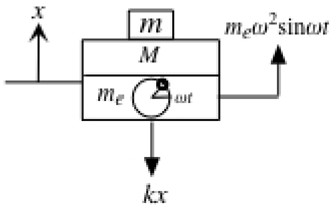
$$\zeta = \frac{X_{st}}{2X} = \frac{F_0}{2kX} = \frac{200}{2 \times (98.7 \times 10^3) \times (15 \times 10^{-3})} = 0.0675 \approx 0.068$$

したがって，減衰係数は**式(2.13)**から次のように求まる.

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2 \times 0.068 \times \sqrt{100 \times (98.7 \times 10^3)} = 427.3\ (\mathrm{Ns}/m)$$

2.12 回転質量m_eによって発生する遠心力は$m_e e\omega^2$であり，そのx方向成分は，$m_e e\omega^2\sin\omega t$となる（ここで 回転質量$m_e$は，反時計方向に角速度 ω で回転する）．振動台上の不釣り合い質量 m を含む上下方向の運動方程式は，自由物体線図から

$$(M+m+m_e)\ddot{x}=-kx+m_e e\omega^2\sin\omega t$$



変形すると

$$(M+m+m_e)\ddot{x}+kx=m_e e\omega^2\sin\omega t \quad ---------- \quad ①$$

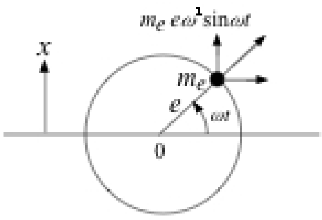
となる．いま強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$$x_p(t)=D\sin\omega t \quad ----------------- \quad ②$$ ここで D は任意係数

（理由：励振力が正弦関数$\sin\omega t$のみであり減衰項がないので，正弦関数のみで特殊解を表すことができる．特殊解に余弦関数$C\cos\omega t$を加えても，結果的にその係数 Cは 0 になる)．

式②を，運動方程式①に代入すると

$$\{-\omega^2(M+m+m_e)+k\}D\sin\omega t=m_e e\omega^2\sin\omega t$$



これから

$$D=\frac{m_e e\omega^2}{k-(M+m+m_e)\omega^2}$$

よって特殊解は

$$x_p(t)=\frac{m_e e\omega^2}{k-(M+m+m_e)\omega^2}\sin\omega t$$

となる．振動台の加速度を算出するために，上式の $x_p(t)$を時間 tで 2 回微分する．

$$\ddot{x}_p(t)=-\frac{m_e e\omega^4}{k-(M+m+m_e)\omega^2}\sin\omega t$$

上式から，加速度振幅の大きさが$10g$ ($g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$)を超えるときの不釣り合い質量 m の角速度ωを求める．すなわち

$$\left|\frac{m_e e\omega^4}{k-(M+m+m_e)\omega^2}\right|\geq 10g$$

となる．これを満足する ωを決定する．加速度振幅の絶対値記号内の正負を考える必要がある．まず，丁度$10g$のとなる角速度ωを求めるため，等号の式を扱うことにする．

1）絶対値記号内が正の場合：

絶対値記号を外して，ω^2に関する 2 次方程式を得る．

$$m_e e\omega^4+10g(M+m+m_e)\omega^2-10gk=0$$

上式より解の公式(**付録 A4**)を使用して求めると

$$\omega^2=\frac{-10g(M+m+m_e)\pm\sqrt{\{10g(M+m+m_e)\}^2+4m_e e\cdot 10gk}}{2m_e e}$$

となるため，$M=15$ (kg)，$m=1$ (kg)，$m_e=3$ (kg)，$k=25000$ (N/m)，$e=3.5$ (mm), $g=9.81$ $(\mathrm{m/s^2})$を代入すると

$$\omega^2 = \frac{-1863.9 \pm \sqrt{3577128.21}}{0.021} = \begin{cases} -178820.5 \\ 1306.2 \end{cases}$$

ωは正なので，上式の根号の(+)の解を採用する．よって，次のように求まる．

$$\omega = 36.14 \quad (\mathrm{rad/s})$$

2）絶対値記号内が負の場合：

ω^2に関する 2 次方程式は

$$m_e e \omega^4 - 10g(M + m + m_e)\omega^2 + 10gk = 0$$

となり，解の公式(**付録 A4**)を使用して求めると

$$\omega^2 = \frac{10g(M + m + m_e) \pm \sqrt{\{10g(M + m + m_e)\}^2 - 4m_e e \cdot 10gk}}{2m_e e}$$

題意の定数を上式に代入すると

$$\omega^2 = \frac{1863.9 \pm \sqrt{3577128.21}}{0.021} = \begin{cases} 176188.6 \\ 1325.7 \end{cases}$$

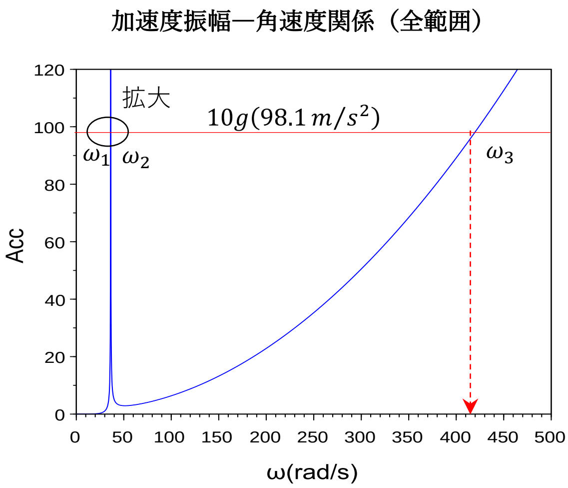
今度は 2 つの解とも正であるので

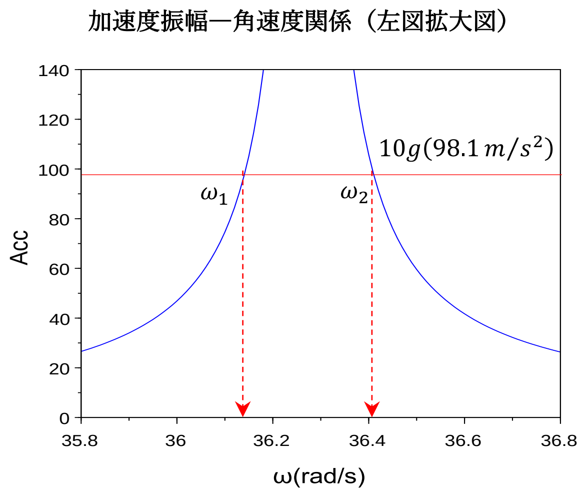
$$\omega = \begin{cases} 419.75 \\ 36.41 \end{cases} \quad (\mathrm{rad/s})$$

となる．したがって，この振動台の加速度振幅が$10g$となる角速度は，以下の 3 つである．

$\omega_1 = 36.14$ rad/s，$\omega_2 = 36.41$ rad/s，$\omega_3 = 419.75$ rad/s

不釣り合い質量 m の角速度ωを 0 から出発すると，最初の最も低い角速度に対応する$\omega_1 = 36.14$ (rad/s)が解となる．





（注）角速度ωと回転速度 Nの関係式

回転速度 Nの単位を rpm(回転数/分)で表示すると

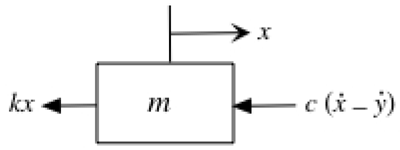
$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \quad (\mathrm{rad/s})$$

回転速度 Nの単位を rps (回転数/秒)で表示すると, 1 rpm = 60 rps なので

$$\omega = 2\pi N \quad (\mathrm{rad/s})$$

2.13　図 2.43 のように変位励振 $y(t) = Y\sin\omega t$ を受ける質量 m の運動方程式は，自由物体線図から

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - kx$$



ここで，$\dot{y} = -\omega Y\cos\omega t$ を上式に代入して整理する．

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 2\zeta\omega_n\omega Y\cos\omega t \quad \text{----------} \quad ①$$

ただし，$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{k/m}$，$\zeta = c/2\sqrt{mk}$．

いま強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$$x_p(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad \text{----------} \quad ②$$ ここで，C，D は任意係数

式②を運動方程式①に代入して，$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の項に分けて整理する．

$$\left.\begin{array}{r}(\omega_n^2 - \omega^2)C + 2\zeta\omega_n\omega D = 2\zeta\omega_n\omega Y \\ -2\zeta\omega_n\omega C + (\omega_n^2 - \omega^2)D = 0\end{array}\right\}$$

上式を行列形式で表すと

$$\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega \\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\zeta\omega_n\omega Y \\ 0\end{Bmatrix}$$

左辺の逆行列(**付録 A3-10**)を左から乗じて，任意定数 C, D について解く

$$\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & -2\zeta\omega_n\omega \\ 2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\zeta\omega_n\omega Y \\ 0\end{Bmatrix}$$

行列と列ベクトルとの積の演算によって

$$\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{Bmatrix}2\zeta\omega_n\omega(\omega_n^2 - \omega^2)Y \\ (2\zeta\omega_n\omega)^2 Y\end{Bmatrix}$$

となる．いま特殊解②の三角関数を合成（**付録 A2.1-5**）して

$$x_p(t) = X\sin(\omega t + \phi)$$

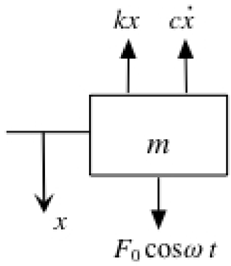
と表すと，変位振幅は $X = \sqrt{C^2 + D^2}$ から

$$X = \frac{(2\zeta\omega_n\omega)Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)Y}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

（注）初期位相角 ϕ は，次のように求まる．

$$\phi = \tan^{-1}\frac{C}{D} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{2\zeta\omega_n\omega}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{2\zeta(\omega/\omega_n)}\right\}$$

2.14 $m = 10$ (kg)，$k = 100$ (N/m) のばね-質量-ダッシュポッド系で，
自由振動させると振幅が 5 サイクルで 1/10 に減少した．



式(2.36)　対数減衰率は，$\delta = \frac{1}{5}\ln 10 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.4605$ から

式(2.37)　減衰比は，$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0.4605}{\sqrt{4\pi^2+0.4605^2}} = 0.07309$

式(2.11)　固有角振動数は，$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{10}} = 3.162$　(rad/s)

式(2.31) 減衰係数は，$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 4.623$ (Ns/m)

以上で，系のパラメータが全て決まったので，調和外力$f(t) = 20\cos 10t$を受けるときの強制振動の変位振幅Xを求める．運動方程式は自由物体線図から

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

両辺を m で除して変形すると

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \left(\frac{F_0}{m}\right)\cos\omega t \quad \text{----------} \quad ①$$

ただし，$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{k/m}$，$\zeta = c/2\sqrt{mk}$.

いま，強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$$x_p(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad \text{----------} \quad ② \quad ここで，\ C,\ D\ は任意係数$$

式②を式①に代入して，$\cos\omega t$と$\sin\omega t$ の項に分けて整理する．

$$(-\omega^2 C\cos\omega t - \omega^2 D\sin\omega t) + (-2\zeta\omega_n\omega C\sin\omega t + 2\zeta\omega_n\omega D\cos\omega t) + (\omega_n^2 C\cos\omega t + \omega_n^2 D\sin\omega t)$$
$$= \frac{F_0}{k}\frac{k}{m}\cos\omega t$$

すなわち

$$(-\omega^2 C + 2\zeta\omega_n\omega D\cos\omega t + \omega_n^2 C)\cos\omega t + (-\omega^2 D - 2\zeta\omega_n\omega C + \omega_n^2 D)\sin\omega t = \frac{F_0}{k}\frac{k}{m}\cos\omega t$$

上式の両辺の$\cos\omega t$と$\sin\omega t$の係数を比較すると，次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}(\omega_n^2 - \omega^2)C + 2\zeta\omega_n\omega D = X_{st}\omega_n^2 \\ -2\zeta\omega_n\omega C + (\omega_n^2 - \omega^2)D = 0\end{aligned}\right\}$$

ここで，ばねの静的変位を $X_{st} = \frac{F_0}{k}$，$\omega_n{}^2 = \frac{k}{m}$ と書き直す．上式を行列形式で表すと

$$\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega \\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}X_{st}\omega_n^2 \\ 0\end{Bmatrix}$$

上式の左辺の逆行列(**付録 A3–10**)を左から乗じて，任意係数 C, D について解くと

$$\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & -2\zeta\omega_n\omega \\ 2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_{st}\omega_n^2 \\ 0\end{Bmatrix}$$

行列と列ベクトルとの積の演算によって

$$\begin{Bmatrix}C \\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{Bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2)\omega_n^2 X_{st} \\ 2\zeta\omega_n\omega\omega_n^2 X_{st}\end{Bmatrix}$$

式②の特殊解を，三角関数の合成(**付録 A2.1–5**)から

$$x_p(t) = X\sin(\omega t + \phi) \quad \text{----------} \quad ③$$

のように表すと，変位振幅$X = \sqrt{C^2 + D^2}$ より

$$X = \frac{\omega_n^2 X_{st}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

初期位相角ϕは

$$\phi = \tan^{-1}\frac{C}{D} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{2\zeta\omega_n\omega}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{2\zeta(\omega/\omega_n)}\right\}$$

となる．これらに題意の各数値を代入する．

$$X_{st}=\frac{F_0}{k}=\frac{20}{100}=0.2\ (\mathrm{m}),\quad \omega_n=\sqrt{\frac{100}{10}}=\sqrt{10}\ (\mathrm{rad/s}),\quad \omega=10\ (\mathrm{rad/s}),\quad \frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{10},\quad \zeta=0.073$$

変位振幅 Xは，上記の値を代入すると次のように求まる．

$$X=\frac{0.2}{\sqrt{\left\{1-\left(\sqrt{10}\right)^2\right\}^2+\left(2\times0.073\times\sqrt{10}\right)^2}}=\frac{0.2}{\sqrt{81.21316}}=0.022193\approx2.2\ (\mathrm{cm})$$

初期位相角ϕは，次のように求まる．

$$\phi=\tan^{-1}\left\{\frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{2\zeta(\omega/\omega_n)}\right\}=\tan^{-1}\frac{1-10}{2\times0.073\times\sqrt{10}}=\tan^{-1}(-19.49)=-1.52\quad(\mathrm{rad})$$

（注）式③によって特殊解を$x_p(t)=X\sin(\omega t+\phi)$と表したので，初期位相角$\phi$は負値として求まる．もし，$x_p(t)=X\sin(\omega t-\phi)$と表したならば，初期位相角$\phi$は正値として求まり，結果は同一となる．

2.15 [例題 2.3]を参考にすると，軸のねじりばね定数（ねじり剛性）は

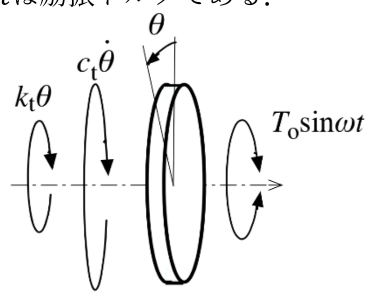
$$K_t=\frac{\pi Gd^4}{32l}$$　ただし，Gは軸の横弾性率である

円板の軸まわりの回転の運動方程式は，自由物体線図から

$$J\ddot{\theta}=-K_t\theta-c_t\dot{\theta}+T_0\sin\omega t$$

ここで，Jは円板の慣性モーメント，c_tはねじり減衰係数，$T_0\sin\omega t$は励振トルクである．

上式の両辺をJで除すると，次式を得る．



$$\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=(T_0/J)\sin\omega t\quad ----------\quad ①$$

ここで

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_t}{J}}=\sqrt{\frac{\pi Gd^4}{32lJ}},\qquad \zeta=\frac{c_t}{2\sqrt{JK_t}}=\frac{c_t}{2}\sqrt{\frac{32l}{\pi Gd^4J}}$$

強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$$\theta_p(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t\quad ----------\quad ②$$　ここで，　C，D は任意係数

式②を運動方程式①に代入すると，次式を得る．

$$(-\omega^2C\cos\omega t-\omega^2D\sin\omega t)+(-2\zeta\omega_n\omega C\sin\omega t+2\zeta\omega_n\omega D\cos\omega t)+(\omega_n^2C\cos\omega t+\omega_n^2D\sin\omega t)$$
$$=(T_0/J)\sin\omega t$$

上式の左辺を，$\cos\omega t$と$\sin\omega t$について整理すると

$$\{(\omega_n^2-\omega^2)C+2\zeta\omega_n\omega D\}\cos\omega t+\{-2\zeta\omega_n\omega C+(\omega_n^2-\omega^2)D\}\sin\omega t=(T_0/J)\sin\omega t$$

上式の両辺の$\cos\omega t$と$\sin\omega t$の係数を比較すると，次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}(\omega_n^2-\omega^2)C+2\zeta\omega_n\omega D&=0\\-2\zeta\omega_n\omega C+(\omega_n^2-\omega^2)D&=\frac{T_0}{J}\end{aligned}\right\}$$

上式を行列形式で表すと

$$\begin{bmatrix}(\omega_n^2-\omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega\\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2-\omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C\\D\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\T_0/J\end{Bmatrix}$$

上式の左辺の逆行列（**付録 A3–10**）を左から乗じて，任意係数 C, D について解く．

$$\begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix} (\omega_n^2-\omega^2) & -2\zeta\omega_n\omega \\ 2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2-\omega^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ T_0/J \end{Bmatrix}$$

行列と列ベクトルとの積の演算によって

$$\begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{Bmatrix} -2\zeta\omega_n\omega(T_0/J) \\ (\omega_n^2-\omega^2)(T_0/J) \end{Bmatrix}$$

式②の特殊解$\theta_p(t)$の三角関数を合成（**付録 A2.1–5**）して

$$\theta_p(t) = \Theta\sin(\omega t+\phi)$$

と表すと，角度振幅は $\Theta = \sqrt{C^2+D^2}$ から，次式を得る．

$$\Theta = \frac{T_0/J}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{T_0/(J\omega_n^2)}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

（注）初期位相角ϕは，次のようになる．

$$\phi = \tan^{-1}\frac{C}{D} = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right) = -\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right\}$$

上式から初期位相角ϕは，負値として決定される．**[演習問題 2.14]** の（注）を参照.

2.16 周期外力はフーリエ級数によって調和外力に変換できる．**図 2.45** の周期外力は**[演習問題 1.6]**を参考に，フーリエ級数に変換する（フーリエ級数の導出は省略）．

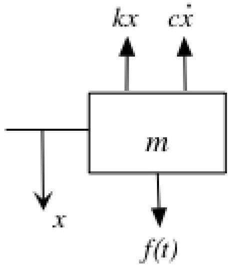
図 2.45 に示すのこぎり波形はフーリエ級数より，以下のように表現できる．

$$f(t) = \frac{F_0}{2} - \frac{F_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

定数項$F_0/2$に対する変位応答は，$F_0/2k = X_{st}/2$となる（$X_{st} = F_0/k$ ：ばねの静的変位）．

次に，のこぎり波形の調和外力項 $\frac{F_0}{i\pi}\sin i\omega t$に対する応答を求める．

ばね-質量-ダッシュポッド系の強制振動の特殊解を，**[演習問題 2.15]**で示したように求める．ここでは，強制励振力の振幅を $F_0/i\pi$，その角振動数を $i\omega$と置き換えて解く．すなわち**式(2.70)**から



$$x_i(t) = \frac{X_{st}}{\sqrt{\{1-(i\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(i\omega/\omega_n)\}^2}}\frac{1}{i\pi}\sin(i\omega t-\phi_i)$$

ここで，$\phi_i = \tan^{-1}\frac{2\zeta(i\omega/\omega_n)}{1-(i\omega/\omega_n)^2}$

となる．定数項の応答を含んで i について総和を取ると，強制振動の特殊解（定常振動解）は

$$x(t) = \frac{X_{st}}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)$$

と表すことができる．

2.17 基礎に伝わる伝達力は，**式(2.87)**から

$F_T = c\dot{x} + kx$ ---------- ①

となる．したがって，質量 m の振動変位xおよび速度$\dot{x}$を求める必要がある．

質量 m の運動方程式は，自由物体線図から

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 \sin\omega t$$

両辺を m で除して整理して

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$ ---------- ②

ここで，$\zeta = c/2\sqrt{mk}$，$\omega_n = \sqrt{k/m}$である．

いま強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$x_p(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ ---------- ③ ここで， C，D は任意係数

式③を式②に代入する．

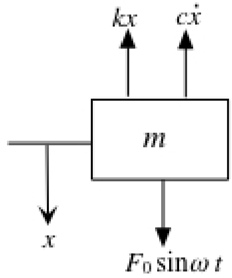
$$(-\omega^2 C\cos\omega t - \omega^2 D\sin\omega t) + (-2\zeta\omega_n\omega C\sin\omega t + 2\zeta\omega_n\omega D\cos\omega t) + (\omega_n^2 C\cos\omega t + \omega_n^2 D\sin\omega t)$$
$$= (F_0/m)\sin\omega t$$

上式を$\cos\omega t$および$\sin\omega t$について整理すると

$$\left(-\omega^2 C + 2\zeta\omega_n\omega D + \omega_n^2 C\right)\cos\omega t + (-\omega^2 D - 2\zeta\omega_n\omega C + \omega_n^2 D)\sin\omega t = (F_0/m)\sin\omega t$$

両辺の係数を比較すると

$$\left.\begin{aligned}(\omega_n^2 - \omega^2)C + 2\zeta\omega_n\omega D &= 0\\ -2\zeta\omega_n\omega C + (\omega_n^2 - \omega^2)D &= \frac{F_0}{m}\end{aligned}\right\}$$



上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega\\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C\\ D\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ F_0/m\end{Bmatrix}$$

上式の左辺の逆行列(**付録 A3-10**)を左から乗じて，任意係数 C, D について解く．

$$\begin{Bmatrix}C\\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}(\omega_n^2 - \omega^2) & -2\zeta\omega_n\omega\\ 2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ F_0/m\end{Bmatrix}$$

行列と列ベクトルとの積の演算によって

$$\begin{Bmatrix}C\\ D\end{Bmatrix} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{Bmatrix}-2\zeta\omega_n\omega(F_0/m)\\ (\omega_n^2 - \omega^2)(F_0/m)\end{Bmatrix}$$

ここで

$$\frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{k}{m} = X_{st}\cdot\omega_n^2$$

であり，式③の特殊解$x_p(t)$の三角関数を合成(**付録 A2.1-5**)して

$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi)$ ---------- ④

と表すと，変位振幅は $X = \sqrt{C^2 + D^2}$より

$$X^2 = \frac{1}{\{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2\}^2}\{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2\}X_{st}^2\cdot\omega_n^4$$

$$X = \frac{X_{st}}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

となる．さらに，式④の特殊解$x_p(t)$の合成関数の初期位相角は

$\phi=\tan^{-1}\frac{-C}{D}=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right\}$　　(**p.55** の**図 2.26b**参照)

である．質量 m の速度は式④から

$\dot{x}_p(t)=\omega X\cos(\omega t-\phi)$

伝達力F_Tは，上式の$\dot{x}_p(t)$および$x_p(t)$を式①に代入して，三角関数を合成すると

$$F_T=\frac{X_{st}}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\{\omega c\cos(\omega t-\phi)+k\sin(\omega t-\phi)\}$$

$$=\frac{X_{st}}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\sqrt{k^2+\omega^2c^2}\cdot\sin\{\omega t-(\phi-\theta)\}$$

$$=\frac{F_0}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\sqrt{1+\frac{\omega^2c^2}{k^2}}\cdot\sin\{\omega t-(\phi-\theta)\}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}\ F_0}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\sin\{\omega t-(\phi-\theta)\}\quad\text{--------------}\quad \textbf{式(2.88)}$$

ここで　$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{k}\right)=\tan^{-1}\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}$,　$\frac{\omega^2c^2}{k^2}=\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2$，$\frac{X_{st}}{k}=F_0$

伝達力の大きさは，外力振幅を求めればよいので，上式から

$$|F_T|=\frac{\sqrt{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}\ F_0}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\quad\text{----------}\quad ⑤$$

となる．与えられた値を代入すると

$\omega_n=\sqrt{\frac{10{,}000}{50}}=10\sqrt{2}$ (rad/s), $\zeta=\frac{200}{2\sqrt{50\times10{,}000}}=0.141$, $F_0=100$ (kN), $f=10$ (Hz)($\omega=20\pi$ rad/s)

となり，振動数比 $\omega/\omega_n=4.443$，$\zeta=0.141$ となるため，伝達力は式⑤から次のように求まる．

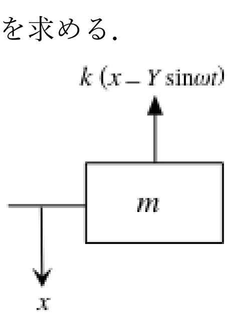
$$|F_T|=\frac{\sqrt{1+(2\times0.141\times4.44)^2}\times100{,}000}{\sqrt{(1-4.44^2)^2+(2\times0.141\times4.44)^2}}=\frac{160306.7}{18.782}=8535.1\ (\text{N})=8.54\ (\text{kN})$$

(注) 力の伝達率 T_R については，式⑤を変形した次式(すなわち**式(2.90)**)から求まる．

$$T_R=\frac{|F_T|}{F_0}=\frac{\sqrt{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}=\frac{8.54}{100}=0.0854$$　(**図 2.31a** 参照)

2.18 基礎励振の問題(**図 2.30b**参照)である．ここでは強制振動の特殊解を求める．

質量 m についての運動方程式は，自由物体線図から



$m\ddot{x}=-k(x-Y\sin\omega t)$

である．xの項だけを左辺に移項して

$m\ddot{x}+kx=kY\sin\omega t$

さらに両辺をmで除すると，次式を得る．

$\ddot{x}+\omega_n^2x=\omega_n^2Y\sin\omega t$　----------------　①　ここで，$\omega_n=\sqrt{k/m}$

いま強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$x_p(t) = D\sin\omega t$　　--------------------　②　　ここで，D は任意係数

（理由：右辺の強制力項が$\sin\omega t$のみで，左辺に減衰項がないため$\cos\omega t$の項は省略できる）

式②を，式①に代入すると

$(\omega_n^2 - \omega^2)D = \omega_n^2 Y$

上式を変形すると，次式を得る．

$$D = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)}Y = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}Y$$

題意より，$Y = 5$ (cm)，$\omega = 4\pi = 12.566$ (rad/s)，$m = 30$ (kg)，$k = 2$ (kN/m)　なので

振動数比　$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{4\pi}{\frac{10\sqrt{6}}{3}} = 1.539$

これから変位振幅 D は，次のように求まる．

$$D = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}Y = \frac{1}{1-1.539^2}5 = -3.6536 = -3.654 \text{ (cm)}$$

強制振動の特殊解②は，次のように求まる．

$x_p(t) = -3.654\sin 12.566t = 3.654\sin(12.566t - \pi)$　(cm)

（注）強制振動の解 $x_p(t)$の変位振幅 D が負値となるのは，基礎からの変位励振 $y(t)$と逆位相(180°　＝ π の遅れ)で質量 m が運動することを意味する．もし，基礎励振の角振動数ωが系の固有角振動数ω_nと一致すれば，変位振幅 D は時間とともに無限に増大する（すなわち，共振を生じる）．

2.19 以下に与えられた微分方程式を，ラプラス変換によってその解を求める．

$\ddot{x} + \dot{x} + x = e^t$　　　初期条件は，$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 1$ である．

各項のラプラス変換は，**表 2.3**，**表 2.4** の公式から

$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2X(s) - sx(\cancel{0}) - \dot{x}(0)$

$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(\cancel{0})$

$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

となるため，両辺をラプラス変換した式に，与えられた初期条件を代入すると

$$(s^2 + s + 1)X(s) - 1 = \frac{1}{s-1}$$

上式から，$X(s)$について解くと

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+s+1)} + \frac{1}{s^2+s+1}$$

となる．上式（補助方程式）を項別に逆ラプラス変換する．

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s^2+s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right]$$

逆ラプラス変換するためには，$X(s)$の右辺の第 1 項を部分分数に展開しておく必要がある．

$$\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}=\frac{A(s^2+s+1)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+s+1)}=\frac{(A+B)s^2+(A-B+C)s+(A-C)}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

$X(s)$の第 1 項の分子の係数比較から，$A+B=0$，$A-B+C=0$，$A-C=1$ の関係式が成立する．A, B, C についての連立方程式を解くと

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=-\frac{2}{3}$$

となる．**表 2.3** のラプラス変換表から$X(s)$ を項別に逆変換すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s^2+s+1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{3}s-\frac{2}{3}}{s^2+s+1}\right]=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{s+2}{s^2+s+1}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=\frac{1}{3}\left[e^t-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

したがって，微分方程式の解 $x(t)$ は 2 つの項の逆ラプラス変換項を足し合わせると

$$x(t)=\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

となる．

2.20 以下の像関数を逆ラプラス変換して，原関数を求める．

(1) $F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+5}=\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+2^2}$

表 2.3 のラプラス変換表から，項別に逆変換すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+2^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}+\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]=e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$$

よって，原関数は次のように求まる．

$$f(t)=e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$$

(2) $F(s)=\frac{(s+2)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$

直接には逆ラプラス変換できないので，次のように部分分数に展開すると

$$\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}=\frac{A(s^2+2s+2)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}=\frac{(A+B)s^2+(2A-B+C)s+(2A-C)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

$F(s)$の分子の係数比較から，$A+B=0$，$2A-B+C=1$，$2A-C=2$ の関係式が成立する．A, B, C の連立方程式を解くと

$$A=\frac{3}{5},\quad B=-\frac{3}{5},\quad C=-\frac{4}{5}$$

となる．したがって，与えられた像関数は次のように求まる．

$$F(s)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{3s+4}{s^2+2s+2}$$

表 2.3 のラプラス変換表を使用して，上式を項別に逆変換すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s-1}\right]=\frac{3}{5}e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{5}\cdot\frac{3(s+1)+1}{(s+1)^2+1}\right]=-\frac{1}{5}\cdot(3e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t)$$

よって，２つの項の逆ラプラス変換項を足し合わせると，原関数は次のように求まる．

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot(3e^t-3e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)$$

＝＝

三角関数の合成公式（**付録** A2.1-5 参照）

$$A\sin\alpha+B\cos\alpha=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha\pm\phi_1),\qquad \phi_1=\tan^{-1}\left(\pm\frac{B}{A}\right)$$

$$A\sin\alpha+B\cos\alpha=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha\mp\phi_2),\qquad \phi_2=\tan^{-1}\left(\pm\frac{A}{B}\right)$$

＝＝

[演習問題 2.9], **[演習問題 2.10]**における $\sin\theta\cong\theta$ の近似度についての検討

付録 A.6 のテイラー展開から$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\cdots$ となるため，第 1 項近似となる．以下の図($y=\theta$ と $y=\sin\theta$)や表で比較すると，$\theta=15$ 度でも近似誤差（$((\theta-\sin\theta)/\sin\theta$）は 1.15%程度である．

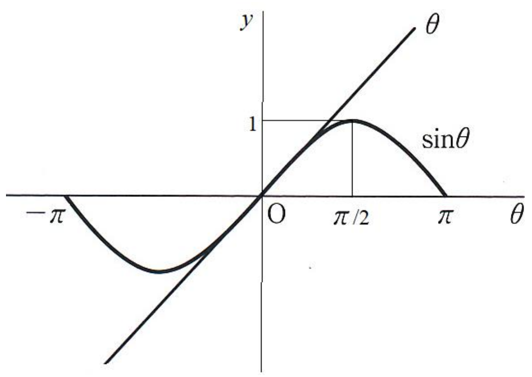


表　θ と $\sin\theta$ との比較

θ（度）	θ（ラジアン）	$\sin\theta$	誤差（%）
1	0.01745	0.01745	0.01
5	0.08727	0.08716	0.13
10	0.17453	0.17365	0.51
15	0.26180	0.25882	1.15
20	0.34907	0.34202	2.06
25	0.43633	0.42262	3.25
30	0.52360	0.50000	4.72
35	0.61087	0.57358	6.50
40	0.69813	0.64279	8.61