[演習問題 1]

（注：以下の**ゴシック体**の式番号は，教科書に掲載された式番号を指す）

1.1 図 1.22 における調和振動波形から最初に正弦波を仮定する．特別な座標点を読み取って， 振幅 r, 角振動数ω, 初期位相角ϕ $(-\pi \leq \phi \leq \pi)$を順次決定していく．

(1)まず**式(1.1)**から正弦波　$x(t) = r\sin(\omega t + \phi)$と仮定する．振幅 r は変位＝ 0 からの最大変位であるから　r =2（cm）と決まる．次に最大（小）値から最大（小）値の時間差が周期 T= 2 (s)となるため，**式(1.2)**の T= 2 π/ω = 2 から 角振動数$\omega = \pi$ となる．次にこの正弦波は特別な x-t 座標（0, 2）を通るので，この点の値を正弦波に代入すると，$x(0) = 2\sin(0 + \phi)$ = 2 となる．$\sin(\phi)$ =1から初期位相角$\phi = \pi/2$ となる．したがって，$x(t) = 2\sin(\pi t + \pi/2)$

(2)次に余弦波 $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$　を仮定する．振幅 r =2, 角振動数$\omega = \pi$ （正弦波の場合と同一）となるため，x-t 座標（0, 2）を余弦波に代入すると，$x(0) = 2\cos(0 + \phi)$ = 2 となる．$\cos(\phi)$ =1から初期位相角$\phi = 0$ となる．したがって, $x(t) = 2\cos(\pi t)$

また（１）の正弦波を加法定理（**付録 A2.1−1**）で展開しても，（２）の余弦波を導出できる．

$$x(t) = 2\sin(\pi t + \pi/2) = 2\left\{\cancel{\sin(\pi t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \cos(\pi t)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 2\cos(\pi t)$$

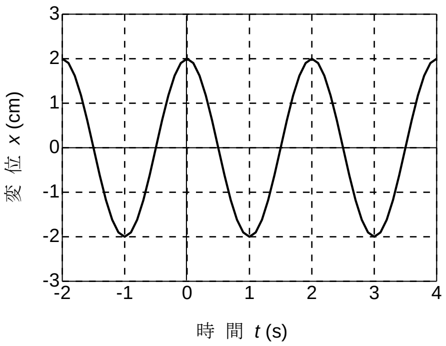

図 1.22　調和振動波形

1.2 角振動数の異なる２つの異なる余弦波 $x_1(t) = 4\cos(\pi t/6 + \pi/4)$ と　$x_2(t) = 5\cos(\pi t/5 + \pi/3)$ を合成する．教科書 **1. 2. 2 項**（p.7）に基づいて， 計算公式を導出する．

$$x(t) = r_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\{\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)\} + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\{\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \cos(\omega_2 t + \phi_2)\}$$

三角関数の和および差の積への変換公式（**付録 A2.1−4**）によって

$$x(t) = \underline{(r_1 + r_2)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$\underline{-(r_1 - r_2)\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)}\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

上式の下線部を振幅と考えて，三角関数の合成公式（**付録 A2.1−5**）によって

$$x(t) = r\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \psi\right)$$

ここで，振幅rと位相角ψは次のようになる．

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\{(\omega_1-\omega_2)t+\phi_1+\phi_2\}}$$

$$\tan\psi=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\tan\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

与えられた値（$r_1=4$，$r_2=5$，$\omega_1=\pi/6$，$\omega_2=\pi/5$，$\phi_1=\pi/4$，$\phi_2=\pi/3$）を代入すると，合成振動は

$$x(t)=r\cos\left(\frac{11\pi}{60}t+\frac{7\pi}{24}+\psi\right)$$

ここで，$r=\sqrt{41+40\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{12}\right)}$，　$\tan\psi=\frac{1}{9}\tan\left(\frac{\pi}{60}t+\frac{\pi}{24}\right)$

（注）三角関数の公式　$\cos(-\theta)=\cos\theta$,　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

1.3 複素数を極形式で表す．偏角θの定義域は，$(-\pi\le\theta\le\pi)$とする．

（1）$1+j\sqrt{3}$　　**式(1.17)**から

絶対値は，$r=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$．偏角は，$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\frac{\pi}{3}$（rad）．よって，$\boldsymbol{r}=2e^{j\frac{\pi}{3}}$

（2）$\left(1+j\sqrt{3}\right)\left(2-j\sqrt{3}\right)$　　2 つの複素数の積を計算すると，$5+j\sqrt{3}$ となる．**式(1.17)**から

絶対値は，$r=\sqrt{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$．偏角は，$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)=0.333$（rad）.

よって，$\boldsymbol{r}=2\sqrt{7}\,e^{j\,0.333}$.

（3）$\left(1+j\sqrt{3}\right)/\left(2-j\sqrt{3}\right)$　　分子，分母に共役複素数を乗じて有理化を行うと

$\frac{1+j\sqrt{3}}{2-j\sqrt{3}}=\frac{\left(1+j\sqrt{3}\right)\left(2+j\sqrt{3}\right)}{\left(2-j\sqrt{3}\right)\left(2+j\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{7}+j\ \frac{3\sqrt{3}}{7}$　　**式(1.17)**から

絶対値は，$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{28}}{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，偏角は，$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{-1}\right)=-1.381$（rad）.

よって，$\boldsymbol{r}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\,e^{-j\,1.381}$

1.4 極形式で表される次の 3 つの複素ベクトルの和を，極形式に合成する．

$\boldsymbol{r_1}(t)=10\,e^{j(\omega t+\pi/4)}$，$\boldsymbol{r_2}(t)=5\,e^{j(\omega t+\pi/3)}$，$\boldsymbol{r_3}(t)=3\,e^{j(\omega t+\pi/6)}$

3 つの複素ベクトルの和は，次のように書ける．

$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r_1}(t)+\boldsymbol{r_2}(t)+\boldsymbol{r_3}(t)=\left(10e^{j\pi/4}+5e^{j\pi/3}+3e^{j\pi/6}\right)e^{j\omega t}=re^{j\phi}e^{j\omega t}$

$e^{j\omega t}$は共通部分なので，括弧内の複素ベクトルを合成する．**式(1.11)**のオイラーの公式から$re^{j\phi}=r(\cos\phi+j\sin\phi)$なので，実数部と虚数部に分けて表すと（電卓の角度(ラジアン)設定に注意）

$$r\cos\phi=10\cos\frac{\pi}{4}+5\cos\frac{\pi}{3}+3\cos\frac{\pi}{6}=12.169$$

$$r\sin\phi = 10\sin\frac{\pi}{4} + 5\sin\frac{\pi}{3} + 3\sin\frac{\pi}{6} = 12.901$$

絶対値は　$r = \sqrt{12.169^2 + 12.901^2} = 17.73$,　偏角は　$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{12.901}{12.169}\right) \approx 0.8146 \approx 0.815\ \text{(rad)}$

したがって，極形式で合成ベクトルを表すと　$\boldsymbol{r}(t) = 17.73e^{j(\omega t + 0.815)}$ となる．

1.5 図 1.23 の三角波（周期関数）のフーリエ級数を求める．

3 つの区間に分けて考える．ただし，1 周期は，$T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$f(t) = \frac{2A\omega}{\pi}t \qquad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2\omega}\right)$$
$$f(t) = 2A - \frac{2A\omega}{\pi}t \qquad \left(\frac{\pi}{2\omega} \le t \le \frac{3\pi}{2\omega}\right)$$
$$f(t) = -4A + \frac{2A\omega}{\pi}t \qquad \left(\frac{3\pi}{2\omega} \le t \le \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

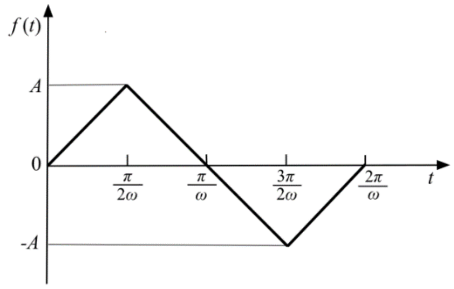

図 1.23

この関数は奇関数である（$\because f(t) = -f(-t)$；原点対称）．したがって，フーリエ係数$a_m = 0$である．また 1 周期毎の平均値は 0 なので，$a_0 = 0$である．したがって，b_mのみを求めればよい．

フーリエ係数　$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t\,dt$　$(m = 1,2,\cdots)$　を計算する．

$$b_m = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\frac{2A\omega}{\pi}t\sin m\omega t\,dt + \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}\left(2A - \frac{2A\omega}{\pi}t\right)\sin m\omega t\,dt + \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(-4A + \frac{2A\omega}{\pi}t\right)\sin m\omega t\,dt$$

時間積分に関係のない項を外に出して整理すると

$$= \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}t\sin m\omega t\,dt + \frac{2A\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}\sin m\omega t\,dt - \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}t\sin m\omega t\,dt$$

$$-\frac{4A\omega}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin m\omega t\,dt + \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}t\sin m\omega t\,dt$$

共通部分の積分を計算すると

$$\int_a^b \sin m\omega t\,dt = \left[\frac{-1}{m\omega}\cos m\omega t\right]_a^b = \frac{-1}{m\omega}(\cos m\omega b - \cos m\omega a)$$

以下は部分積分（**付録 A2.2**）によって

$$\int_a^b t\sin m\omega t\,dt = \left[\frac{-1}{m\omega}t\cos m\omega t\right]_a^b + \frac{1}{m\omega}\int_a^b \cos m\omega t\,dt$$

$\int uv' = uv - \int u'v$　　$u = t$　$v' = \sin m\omega t$，$u' = 1$　$v = -\frac{1}{m\omega}\cos m\omega t$　と置いた．

$$= -\frac{1}{m\omega}[t\cos m\omega t]_a^b + \frac{1}{m^2\omega^2}[\sin m\omega t]_a^b$$

上式の各区間の積分を計算する．

第 1 項　$\frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} t\sin m\omega t\,dt = \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{m\omega}\left[t\cos m\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}}+\frac{1}{m^2\omega^2}\left[\sin m\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\right\}$

$$= \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{\left(-\frac{\pi}{2m\omega^2}\cos\frac{m\pi}{2}-(-0)\right)+\left(-\frac{1}{m^2\omega^2}\sin\frac{m\pi}{2}-0\right)\right\} = -\frac{A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{m\pi}{2}}+\frac{2A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}$$

第 2 項　$\frac{2A\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}\sin m\omega t\,dt = \frac{2A\omega}{\pi}\left(\frac{-1}{m\omega}\right)\left(\cos m\omega\frac{3\pi}{2\omega}-\cos m\omega\frac{\pi}{2\omega}\right) = -\frac{2A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{3m\pi}{2}}+\frac{2A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{m\pi}{2}} = 0$

第 3 項　$-\frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} t\sin m\omega t\,dt = -\frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{m\omega}\left[t\cos m\omega t\right]_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}+\frac{1}{m^2\omega^2}\left[\sin m\omega t\right]_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}}\right\}$

$$= -\frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{\left(-\frac{3\pi}{2m\omega^2}\cos\frac{3m\pi}{2}+\frac{\pi}{2m\omega^2}\cos\frac{m\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{m^2\omega^2}\sin\frac{3m\pi}{2}-\frac{1}{m^2\omega^2}\sin\frac{m\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{3A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{3m\pi}{2}}-\frac{A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{m\pi}{2}}-\frac{2A}{m^2\pi^2}\sin\frac{3m\pi}{2}+\frac{2A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2} = \frac{4A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}$$

第 4 項　$-\frac{4A\omega}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin m\omega t\,dt = -\frac{4A\omega}{\pi}\left(\frac{-1}{m\omega}\right)\left(\cos 2m\pi-\cos\frac{3m\pi}{2}\right) = \frac{4A}{m\pi}\cos 2m\pi-\frac{4A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{3m\pi}{2}} = \frac{4A}{m\pi}$

第 5 項　$\frac{2A\omega^2}{\pi^2}\int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin m\omega t\,dt = \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{m\omega}\left[t\cos m\omega t\right]_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{m^2\omega^2}\left[\sin m\omega t\right]_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\right\}$

$$= \frac{2A\omega^2}{\pi^2}\left\{\left(-\frac{2\pi}{m\omega^2}\cos 2m\pi+\frac{3\pi}{2m\omega^2}\cos\frac{3m\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{m^2\omega^2}\sin 2m\pi-\frac{1}{m^2\omega^2}\sin\frac{3m\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{4A}{m\pi}\cos 2m\pi+\frac{3A}{m\pi}\cancel{\cos\frac{3m\pi}{2}}+\frac{2A}{m^2\pi^2}\cancel{\sin 2m\pi}-\frac{2A}{m^2\pi^2}\sin\frac{3m\pi}{2} = -\frac{4A}{m\pi}+\frac{2A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}$$

上記の結果から，打ち消し合う項とゼロになる項を考慮してまとめる．ただし，

$$\sin\frac{m\pi}{2} = -\sin\frac{3m\pi}{2}\,,\quad \cos\frac{m\pi}{2} = \cos\frac{3m\pi}{2} = 0,\qquad \sin 2m\pi = 0,\ \cos 2m\pi = 1\ (m = 1,2,\cdots)$$

であることに注意すると，

$$b_m = \frac{8A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\qquad ここで\quad \sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases}(-1)^{\frac{(m-1)}{2}} & m = 1\,,3,5\cdots\\ 0 & m = 2,4,6\cdots\end{cases}$$

となる．以上でフーリエ係数が求まったので，フーリエ級数は次のように書ける．

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin m\omega t$$

$$= \left(\frac{8\,A}{\pi^2}\right)\left[\left(\frac{1}{1^2}\right)\sin\omega t-\left(\frac{1}{3^2}\right)\sin 3\omega t+\left(\frac{1}{5^2}\right)\sin 5\omega t\cdots\right]$$

1.6 図 1.24 ののこぎり波（周期関数）のフーリエ級数を求める．

この問題は 1 周期を 1 つの関数で表せる．

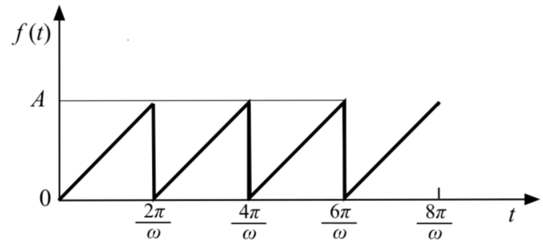

図 1.24

$f(t)=\frac{A\omega}{2\pi}t \quad \left(0\le t\le \frac{2\pi}{\omega}\right)$

ここで一般的に

奇関数：$f(t)=-f(-t)$

偶関数：$f(t)=f(-t)$

と定義される．この関数は直接どちらにも当てはまらないが，平均値 $A/2$ を差し引くと奇関数の条件を満足する．したがってフーリエ係数 $a_n=0$とできる．

$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t\,dt \quad (m=1,2,\cdots)$

$$b_m=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{A\omega}{2\pi}t\sin m\omega t\,dt=\frac{A\omega^2}{2\pi^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}t\sin m\omega t\,dt$$

$$=\frac{A\omega^2}{2\pi^2}\left[-\frac{1}{m\omega}t\cos m\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{A\omega^2}{2\pi^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{m\omega}\cos m\omega t\,dt$$

部分積分公式（**付録 A2.2**）から　$\int uv'=uv-\int u'v$　　$u=t \quad v'=\sin m\omega t$，$u'=1 \quad v=-\frac{1}{m\omega}\cos m\omega t$　と置いた．

$$=-\frac{A\omega}{2m\pi^2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\cos 2m\pi-0\right)+\frac{A\omega}{2m\pi^2}\left[\frac{1}{m\omega}\sin m\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=-\frac{A}{m\pi}+\frac{A\omega}{2m^2\pi^2}(\sin 2m\pi-0)=-\frac{A}{m\pi}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{A\omega}{2\pi}t\,dt=\frac{A\omega^2}{2\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{A\omega^2}{2\pi^2}\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2}{\omega^2}\right)=A$$

したがってフーリエ級数は，次のように求まる．

$$f(t)=\frac{A}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{A}{m\pi}\right)\sin m\omega t=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right]$$

1.7 ばねの合成

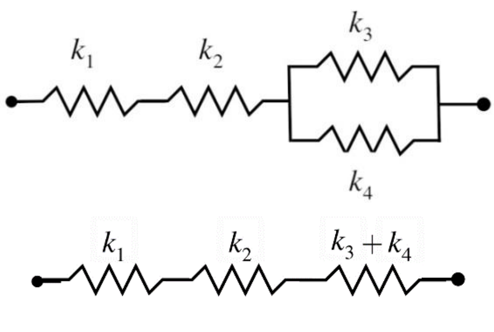

図 1.25

k_3とk_4は並列結合なので，**式(1.23)**から k_3+k_4 となる．

したがって，３本の直列ばねの合成の**式(1.24)**から

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3+k_4}=\frac{k_2(k_3+k_4)+k_1(k_3+k_4)+k_1k_2}{k_1k_2(k_3+k_4)}$$

となり，等価ばね定数は

$$k_{eq}=\frac{k_1k_2(k_3+k_4)}{k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+k_2k_3+k_2k_4}$$

（注）ばねの合成式は，直流の電気回路における抵抗の合成式と逆の関係になることに注意．

n 本の直列抵抗の合成式:　　$R=R_1+R_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+R_n$

n 本の並列抵抗の合成式:　　$1/R=1/R_1+1/R_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+1/R_n$

1.8　ねじりばねの合成

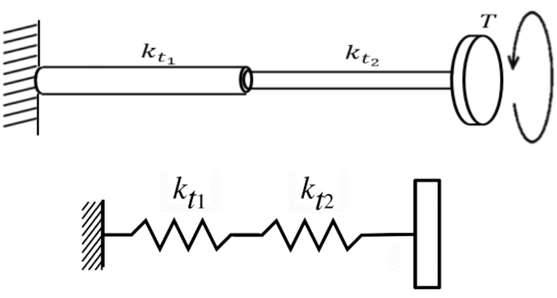

図 1.26

等価ねじりばね定数は，2 本のねじりばね定数の直列ばねの合成の式**(1.24)**から

$$\frac{1}{k_{t_{eq}}} = \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} = \frac{k_{t1} + k_{t2}}{k_{t1}k_{t2}}$$

よって，上式から

$$k_{t_{eq}} = \frac{k_{t1}k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}}$$

1.9 ダッシュポットの合成

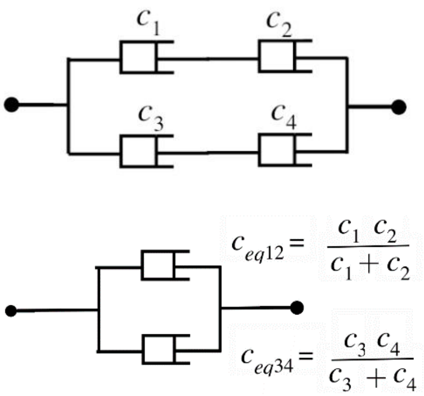

図 1.27

まず上段下段の直列結合のダッシュポットの等価減衰係数は，合成の式**(1.26)**からそれぞれ

$$\frac{1}{c_{eq12}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{c_1 + c_2}{c_1c_2} \qquad c_{eq12} = \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\frac{1}{c_{eq34}} = \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} = \frac{c_3+c_4}{c_3c_4} \qquad c_{eq34} = \frac{c_3c_4}{c_3+c_4}$$

c_{eq12}，c_{eq34} は並列結合のダッシュポットとなるため，等価減衰係数は**式(1.25)**から

$$c_{eq} = c_{eq1} + c_{eq2} = \frac{c_1c_2}{c_1+c_2} + \frac{c_3c_4}{c_3+c_4}$$

1.10　慣性モーメントの計算　（一般物体の慣性モーメントの公式は，**付録 A1** 参照）

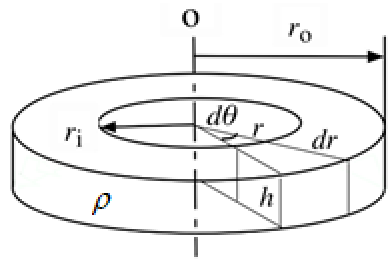

図 1.28

ここでは，慣性モーメントの定義式**(1.34)**から導く．
円環の軸心 O 周りの(極)慣性モーメントは

$$J_o = \int_{r_i}^{r_o} r^2 dm = \int_{r_i}^{r_o} r^2 \rho h r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\rho h \pi (r_o^4 - r_i^4)$$
$$= \frac{1}{2}\rho h \pi \left(r_o^2 - r_i^2\right)\left(r_o^2 + r_i^2\right)$$

ただし，ρ は質量密度，添字oは外側，iは内側を表す．$m_o = \pi r_o^2 \rho h$，$m_i = \pi r_i^2 \rho h$ を使用して上式を書き換えると

$$J_o = \frac{1}{2}\rho h \pi \left(r_o^2 - r_i^2\right)\left(r_o^2 + r_i^2\right) = \frac{1}{2}(m_0 - m_i)\left(r_o^2 + r_i^2\right) = \frac{1}{2} m \left(r_o^2 + r_i^2\right)$$

ここで，$m = m_o - m_i$ である．**式(1.35)**から$J_o = m\kappa^2$であるため，回転半径は次のように求まる．

$$\kappa = \sqrt{\frac{J_o}{m}} = \sqrt{\frac{r_o^2 + r_i^2}{2}}$$

（注）軸対称体の軸心 O 周りの慣性モーメントを，特に極慣性モーメントと呼ぶことがある．