[演習問題 7]

数値計算については，付録の MATLAB プログラムを利用している．共立出版のウェブサイトにも掲載を予定している．実際の課題で使用するには非効率であるが，理論の流れを確認するには十分である．付録の MATLAB プログラムは M ファイルによって記述しているが，MATLAB は市販ソフトであることから入手にはコストがかかる．本書で示した MATLAB プログラムは非常に簡便なものなので，Scilab, Python など他のプログラミング言語でも計算してみることをお勧めする．

7.1　一般化固有値問題

$$[M]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\quad [K]=\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 6\end{bmatrix}$$

から，固有値問題は次のように書ける．

$$\{[K]-\omega^2[M]\}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\omega^2 & -2\\-2 & 6-2\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\quad \text{-------------} \ ①$$

ここで $\{X_1, X_2\}$ は振幅ベクトルとする． 上式の係数行列式＝0 とすると，次の振動数方程式を得る．

$$\begin{vmatrix}4-\omega^2 & -2\\-2 & 6-2\omega^2\end{vmatrix}=(4-\omega^2)(6-2\omega^2)-4$$

$$=2(\omega^4-7\omega^2+10)=2(\omega^2-2)(\omega^2-5)=0$$

上式の解として，固有角振動数は$\omega_{n1}=\sqrt{2}$ ，$\omega_{n2}=\sqrt{5}$　$(0<\omega_1<\omega_2)$となる．

次に固有振動モードも求める．

1）1 次モード： $\omega^2=\omega_{n_1}^2=2$ を，式①の係数行列に代入すると第 1 式から

$$(4-2)X_1^{(1)}-2X_2^{(1)}=0\quad\rightarrow\quad X_1^{(1)}-X_2^{(1)}=0$$

$$\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=1\qquad \text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}X_1^{(1)}\\X_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

2）2 次モード： $\omega^2=\omega_{n_2}^2=5$ を，式①の係数行列に代入すると第 1 式から

$$(4-5)X_1^{(2)}-2X_2^{(2)}=0\quad\rightarrow\quad -X_1^{(2)}-2X_2^{(2)}=0$$

$$\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=-\frac{1}{2}\qquad \text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}X_2^{(2)}\\X_1^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0.5\end{Bmatrix}$$

行列式探索法では係数行列式を展開して導出した振動数方程式から，固有振動数を計算する．本問は，2 自由度系なのでω^2に関する 2 次方程式となり，解の公式（**付録 A4**）から固有値を求めることができるが，3 自由度系以上になると 3 次以上の高次多項式（代数方程式）となり通常は因数分解できないので，2 分法，挟み撃ち法など数値解法を利用する必要がある．以下には，付録プログラム（MATLAB によるべき乗法プログラム）を利用して計算した固有振動数と固有振動モードの結果を示す．

べき乗法による一般化固有値問題の解

```
固有値λ  1次    2次
ans =
     2       5
固有振動モード{X}  1次    2次
ans =
    1.0000    1.0000
    1.0000   -0.5000
```

7.2　3 自由度ばね—質量系の固有振動数と固有振動モードを，付録プログラム（MATLAB によるべき乗法プログラム）を利用して計算すると，以下の解が得られる．

$$[M]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\quad [K]=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}$$

べき乗法による一般化固有値問題の解

```
固有値λ   1次    2次    3次
ans =
    0.2679    2.0000    3.7321
固有振動モード{X}  1次    2次    3次
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
    1.7321   -0.0000   -1.7321
    1.0000   -0.5000    1.0000
```

7.3 実対称行列[A] の固有値と固有ベクトルを，付録プログラム（MATLAB によるヤコビ法プログラム）を利用して計算すると，以下の解が得られる．

$$[A]=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

ヤコビ法による標準形固有値問題の解

```
反復回数
kai =
     8
固有値λ:  1次    2次    3次
ans =
    0.3080    0.6431    5.0489
```

```
固有ベクトル {X}:  1次    2次    3次
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
   -2.2470   -0.5550    0.8019
    1.8019   -1.2470    0.4450
```

7.4　固有値問題

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

上記の運動方程式の加速度ベクトル成分のみを，左辺に残してまとめると

$$\{\ddot{x}\}=-[M]^{-1}[C]\{\dot{x}\}-[M]^{-1}[K]\{x\}$$

となる．上式に自明な式 $\{\dot{x}\}=\{\dot{x}\}$ を加えて，行列形式に表示すると

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \dot{x}\end{Bmatrix}$$

となるため，さらに

$$\{y\}=\begin{Bmatrix}x\\ \dot{x}\end{Bmatrix},\quad [A]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C]\end{bmatrix}$$

とおくと，$\{\dot{y}\}=[A]\{y\}$とできるので，標準形固有値問題 $[A]\{y\}=\lambda\{y\}$ を得る．

7.5　1 階微分方程式の初期値問題を，付録プログラム（MATLAB によるルンゲクッタ法プログラム）を利用して計算すると，以下の解が得られる．時間刻み Δt =0.1s とした．

（a）$\dot{x}(t)=x-1.5e^{-0.5t}$；$x(0)=1$

```
T=0.00,   X=1.000000
T=0.10,   X=0.951229
T=0.20,   X=0.904837
T=0.30,   X=0.860708
T=0.40,   X=0.818731
T=0.50,   X=0.778801
T=0.60,   X=0.740818
T=0.70,   X=0.704688
T=0.80,   X=0.670320
T=0.90,   X=0.637628
T=1.00,   X=0.606530
```

（b）$\dot{x}(t)=-tx^2$；$x(0)=1$

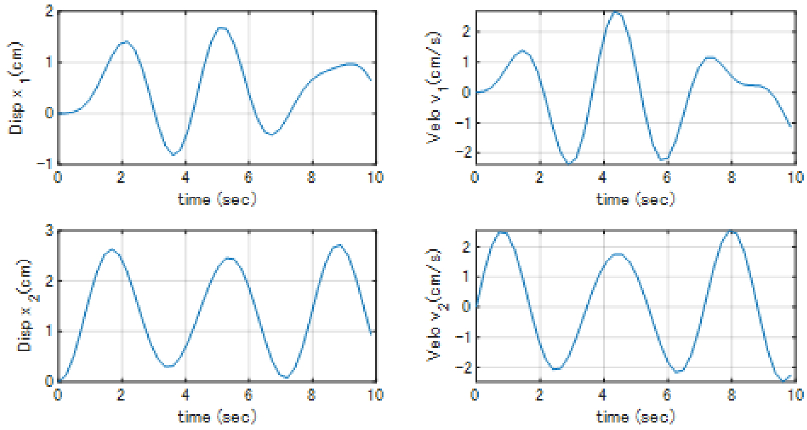
```
T=0.00,   X=1.000000
T=0.10,   X=0.951229
T=0.20,   X=0.904837
T=0.30,   X=0.860708
T=0.40,   X=0.818731
T=0.50,   X=0.778801
T=0.60,   X=0.740818
T=0.70,   X=0.704688
T=0.80,   X=0.670320
T=0.90,   X=0.637628
T=1.00,   X=0.606530
```

7.6　図 7.11 の 2 自由度ばね—質量系の過渡応答問題を付録プログラム（MATLAB によるニューマークβ法プログラム）を利用して計算すると，以下の解が得られる．運動方程式を以下に示す．

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

ニューマーク β 法（β =1/4）　　時間刻み Δt =0.24 s

(sec)	(cm)	
T=0.00	X1=0.000000	X2=0.000000
T=0.24	X1=0.003611	X2=0.136207
T=0.48	X1=0.026961	X2=0.515520
T=0.72	X1=0.100698	X2=1.056996
T=0.96	X1=0.255773	X2=1.647110
T=1.20	X1=0.502248	X2=2.165887
T=1.44	X1=0.814078	X2=2.513381
T=1.68	X1=1.127331	X2=2.630001
T=1.92	X1=1.354471	X2=2.506211
T=2.16	X1=1.411127	X2=2.180200
T=2.40	X1=1.246653	X2=1.725387



質量 m_1（上段）, m_2（下段）の変位と速度の時間的変化（10 秒まで）

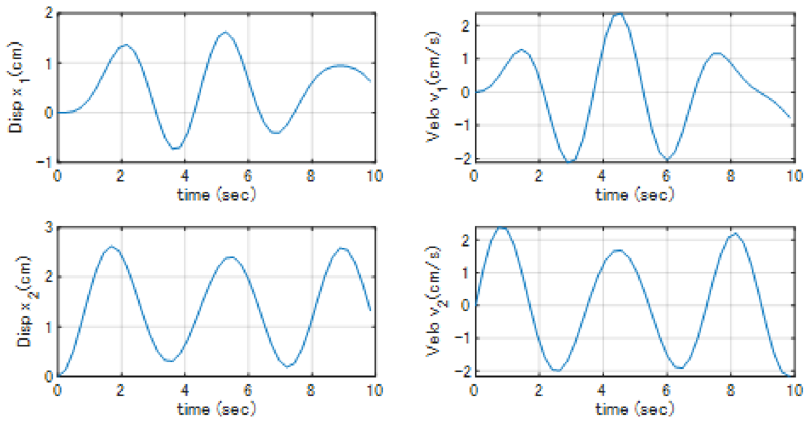
7.7　図 7.11 の 2 自由度ばね―質量系の過渡応答問題を付録プログラム（MATLAB によるウィルソン θ 法プログラム）を利用して計算すると，以下の解が得られる．運動方程式は前問 7.6 と全く同一である．

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2\\-2 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

この解は前問 7.6 の数値結果とよく一致している．

ウィルソン θ 法　（θ=1.4）　　時間刻み Δt =0.24 s

(sec)	(cm)	
T=0.00	X1=0.000000	X2=0.000000
T=0.24	X1=0.003237	X2=0.136857
T=0.48	X1=0.028023	X2=0.511928
T=0.72	X1=0.104009	X2=1.043025
T=0.96	X1=0.257754	X2=1.621481
T=1.20	X1=0.495562	X2=2.133985
T=1.44	X1=0.791684	X2=2.485771
T=1.68	X1=1.087960	X2=2.618720
T=1.92	X1=1.306569	X2=2.520342
T=2.16	X1=1.372716	X2=2.222417
T=2.40	X1=1.240146	X2=1.790673

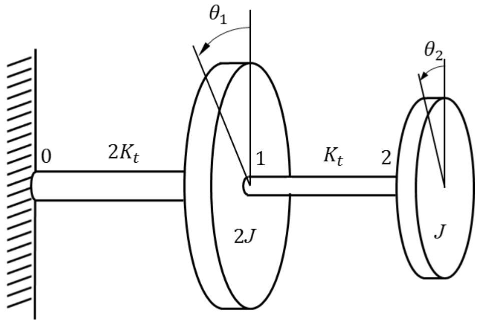


質量 m_1（上段）, m_2（下段）の変位と速度の時間的変化（10 秒まで）

7.8　伝達マトリックスの応用問題

ねじり振動系の状態量ベクトルは $\{z\}_i = \{\theta \quad T\}_i^T$ とおくことができる．ここでは，iは各円板の位置を表す．円板 1 を$i = 1$とし，円板 2 を$i = 2$とする．また，固定端を$i = 0$とする．

円板部分を格点マトリックスとして，



$$[T_P]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2J\omega^2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [T_P]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$$

軸のねじりばね部分は格間マトリックスとして，

$$[T_F]_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2K_t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [T_F]_2 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{K_t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

境界条件を考えると，固定端ではねじり角変位はゼロなので，状態量ベクトルは$\{z\}_0 = \{0 \quad T_0\}_0^T$.
円板 2 の位置では，ねじりモーメント（トルク）は作用しないので，$\{z\}_2 = \{\theta_2 \quad 0\}_2^T$ である．
固定端から円板 2 までのねじり角変位とねじりモーメントの伝達を考えると

$$\{z\}_2 = [T_P]_2[T_F]_2[T_P]_1[T_F]_1\{z\}_0 = [T]_2\{z\}_0 \qquad \text{-------} \quad ①$$

上記の格点マトリックスと格間マトリックスを上式①に代入して，行列の積の演算を 3 回すると

$$[T]_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2J}{K_t}\omega^2 & \frac{3}{2K_t} - \frac{J}{K_t^2}\omega^2 \\ -3J\omega^2 + \frac{2J^2}{K}\omega^4 & \frac{J^2}{K_t^2}\omega^4 - \frac{5J}{2K_t}\omega^2 + 1 \end{bmatrix} \qquad \text{------} \quad ②$$

となる．境界条件を考慮すると，式②の伝達マトリックス$[T]_2$の 2 行 2 列成分=0 から

$$\frac{J^2}{K_t^2}\omega^4 - \frac{5J}{2K_t}\omega^2 + 1 = 0 \quad すなわち \quad \frac{1}{2}\left(\frac{2J}{K_t}\omega^2 - 1\right)\left(\frac{J}{K_t}\omega^2 - 2\right) = 0$$

となる．これが振動数方程式である．上式の解として，$\omega_1 < \omega_2$とすると

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{2J}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2K_t}{J}}$$

となる．固有モードは，固定端$i = 0$でのねじりモーメントを仮に$T_0 = 1$とおくと，状態量ベクトルは

$$\{z\}_0 = \{0 \quad 1\}_0^T$$

したがって

$$\{z\}_1 = [T_P]_1[T_F]_1\{z\}_0 = [T]_1\{z\}_0 \qquad \text{--------} \quad ③$$

ここで

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2K_t} \\ -2J\omega^2 & 1 - \dfrac{J}{K_t}\omega^2 \end{bmatrix}$$

なので，式③の 1 行 1 列の積から$\theta_1 = 1/2K_t$となる．（これは，1 次および 2 次の固有モードで共通である．）ねじり角変位θ_2を求める際には，式②の$[T]_2$の 1 行 2 列成分を利用すると

$$\theta_2 = \frac{3}{2K_t} - \frac{J}{{K_t}^2}\omega^2 \qquad \text{--------} \quad ④$$

式④に固有角振動数ω_1を代入すると，1 次の固有振動モードが求まり， $\theta_2 = 1/K_t$となるため

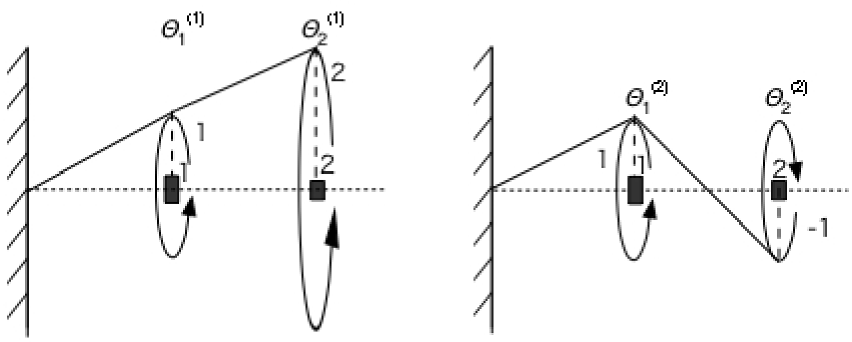
$$\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(1)}\\ \Theta_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\frac{1}{K_t}\begin{Bmatrix}1/2\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2K_t}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}$$

同様に式④に固有角振動数ω_2を代入すると，2 次の固有振動モードが求まり，$\theta_2=-1/2K_t$となり

$$\begin{Bmatrix}\Theta_1^{(2)}\\ \Theta_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2K_t}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$$

1 次と 2 次のねじり固有振動モードを，以下に図示する．

1 次ねじり振動モード　　2 次ねじり振動モード



[別　解] MATLAB によるべき乗法プログラムを利用して，固有値 λ = ω^2（固有振動数）と固有振動モードを計算した結果を以下に示す．計算では，以下で J=1，K_t=1 とおく．

2 つの円板の軸まわりの回転の運動方程式は，次式で与えられる．

$$J\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+K_t\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

べき乗法による一般化固有値問題の解

```
固有値λ  1次     2次
ans =
      0.5000       2.0000
固有振動モード{X}   1次     2次
ans =
      1.0000       1.0000
      2.0000     -1.0000
```

7.9　伝達マトリックスの応用問題

演習問題 7.8 と同様に，円板のねじり振動系の状態量ベクトルは $\{z\}_i=\{\theta \quad T\}_i^T$ とおくことができる．記号iは各円板の位置を表す．ここでは，各円板を$i=1\sim4$とする．

円板部分を格点マトリックスとして

$$[T_P]_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -J_1\omega^2 & 1\end{bmatrix},\quad [T_P]_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -J_2\omega^2 & 1\end{bmatrix},\quad [T_P]_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -J_3\omega^2 & 1\end{bmatrix},\quad [T_P]_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -J_4\omega^2 & 1\end{bmatrix}$$

軸のねじりばね部分は格間マトリックスとして

$$[T_F]_1=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{K_{t1}}\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad [T_F]_2=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{K_{t2}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

また，円板 2（歯数z_2）と円板 3（歯数z_3）の間の歯車の伝達マトリックスは，その歯数比（$=z_2/z_3$）を考慮して以下のようにおく．

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ T\end{Bmatrix}_2=\begin{bmatrix}z_3/z_2 & 0\\ 0 & z_2/z_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ T\end{Bmatrix}_3$$

上式を状態量ベクトル$\{z\}_2=[G]\{z\}_3$ と表すと，円板 1 から円板 4 までの伝達マトリックスの関係は

$$\{z\}_1=[T_P]_1[T_F]_1[T_P]_2[G][T_P]_3[T_F]_2[T_P]_4\{z\}_4 \quad \text{----------------------} \quad ①$$

となる．ここで，図 3.18 から両端の円板 1 および円板 4 で自由端（無拘束）となっているので，境界条件はねじりモーメント T が共にゼロになり， $\{z\}_1=\{\theta_1\quad 0\}_1^T$，$\{z\}_4=\{\theta_4\quad 0\}_4^T$　とおける．
式①の右辺の行列の積の演算を 6 回連続して行うと，次式を得る．

$$\{z\}_1=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ 0\end{Bmatrix}_1=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_4\\ 0\end{Bmatrix}_4=\begin{Bmatrix}T_{11}\theta_4\\ T_{21}\theta_4\end{Bmatrix} \quad \text{-------------------} \quad ②$$

上式から振動数方程式は，$T_{21}=0$（円板 1 の自由端条件）とすることによって求まる．ここで，歯数比　$n=z_2/z_3$ とおくと，式②の 2 行 2 列の伝達マトリックスの各成分は

$$\left.\begin{aligned}
T_{11}&=\left(\frac{J_2J_4}{K_{t1}K_{t2}n}+\frac{J_3J_4n}{K_{t1}K_{t2}}\right)\omega^4-\left(\frac{J_2}{K_{t1}n}+\frac{J_4}{K_{t2}n}+\frac{(J_3+J_4)n}{K_{t1}}\right)\omega^2+\frac{1}{n}\\
T_{12}&=-\left\{\left(\frac{J_2}{K_{t1}K_{t2}n}+\frac{J_3n}{K_{t1}K_{t2}}\right)\omega^2-\frac{1}{K_{t2}n}-\frac{n}{K_{t1}}\right\}\\
T_{21}&=-\omega^2\left\{\left(\frac{J_1J_2J_4}{K_{t1}K_{t2}n}+\frac{J_1J_3J_4n}{K_{t1}K_{t2}}\right)\omega^4-\left(\frac{J_1J_2}{K_{t1}n}+\frac{(J_3+J_4)J_1n}{K_{t1}}+\frac{J_3J_4n}{K_{t2}}+\frac{(J_1+J_2)J_4}{K_{t2}\,n}\right)\omega^2+(J_1+J_2)\frac{1}{n}+(J_3+J_4)n\right\}\\
T_{22}&=\left(\frac{J_1J_2}{K_{t1}K_{t2}n}+\frac{J_1J_3n}{K_{t1}K_{t2}}\right)\omega^4-\left(\frac{J_1+J_2}{K_{t2}n}+\frac{J_1n}{K_{t1}}+\frac{J_3n}{K_{t2}}\right)\omega^2+n
\end{aligned}\right\}$$

となる．$T_{21}=0$は ω^2に関する 2 次方程式なので，解の公式**(付録 A4)**によって解くことができる．
ここでは, $T_{21}=0$をそのまま解くのは煩雑なので，$n=z_2/z_3=1/2$, $J_1=J$, $J_2=J/2$, $J_3=J$, $J_4=2J$, $K_{t1}=K_t$, $K_{t2}=2K_t$ と簡略化する．これよって，$T_{21}=0$ は

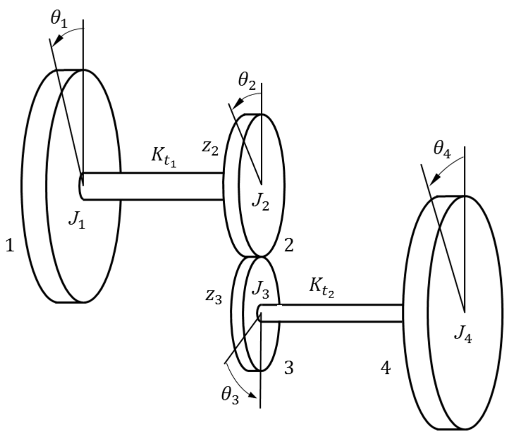
$$-3\omega^2J\left(\frac{J^2}{2K_t^2}\omega^4-\frac{2J}{K_t}\omega^2+\frac{3}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{3}{2}\omega^2J\left(\frac{J}{K_t}\omega^2-1)(\frac{J}{K_t}\omega^2-3\right)=0 \quad \text{--------} \quad ③$$

となる．式③ から解の 1 つは，固有角振動数 $\omega_0=0$（剛体モード：円板 1, 2 と円板 3, 4 が一体となって同一方向に回転し，両者の回転方向は逆で角度振幅比は 2：１）である．式③の残りの 2 つの解が固有角振動数 $\omega_1=\sqrt{K_t/J}$，$\omega_2=\sqrt{3K_t/J}$ となる．ねじり振動モードは，$\theta_4=1$（正規化）とおいて，伝達マトリックスを順次計算する. この計算過程は長くなるため, 省略する. ねじり振動モード$\{\Theta^{(i)}\}$ ($i=0,1,2$)は，それぞれ次のようになる．

1) 0 次モード： $\omega_0=0$ の場合　$\{\Theta^{(0)}\}=\begin{Bmatrix}2\\2\\1\\1\end{Bmatrix}$

2) 1 次モード： $\omega_1 = \sqrt{K_t/J}$ の場合　$\{\Theta^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

3) 2 次モード： $\omega_2 = \sqrt{3K_t/J}$ の場合　$\{\Theta^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$



7.10　伝達マトリックスの応用問題（演習問題 5.2 の弦の連続体系の取り扱いとは異なることに注意）

状態量として弦（ここでは，分布質量を無視して張力による復元力だけを考慮）の横方向変位（たわみ）とせん断力として，状態量ベクトルは $\{z\}_i = \{y \quad Q\}_i^T$ とおく．各点を$i = 0{\sim}3$とする．**図 7.13** の（集中）質量 m をもつ点$i = 1{\sim}2$について，上下方向に作用する慣性力とせん断力 Q のつり合いから

$Q_i^L = m\omega^2 y_i + Q_i^R$　（ただし，$Q_i^L = Q_{i-1}^R$）　-----------　①

ここで，ω は固有角振動数，添字iは質量 m の位置を，y_i はその点での弦のたわみ，上添字の L および R は，質量 m の左側および右側を示す．点i でのたわみの連続性から

$y_i^L = y_i^R$　-----------　②

上の 2 つの式①と式②より，格点マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} y \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ Q \end{Bmatrix}_i^L$$

したがって，点$i = 1{\sim}2$の格点マトリックスは

$$[T_P]_1 = [T_P]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．次に弦の張力 T を一定として，弦上の点iでの上下方向の力のつり合い（**演習問題 4.4** 参照）を考えると

$Q_i^R = T\sin\theta$　（θ: 弦と水平方向とのなす角度）---------　③

である．弦のたわみ角は幾何学的関係から

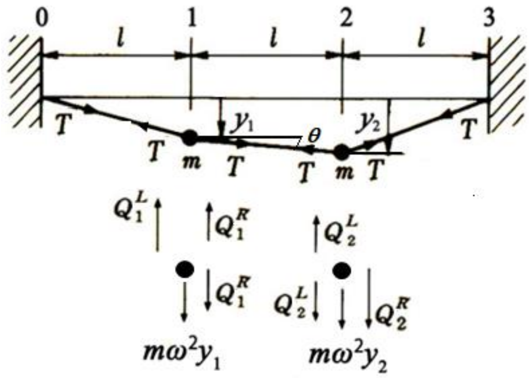
$\frac{y_i^L - y_{i-1}^R}{l} = \tan\theta \cong \sin\theta$（微小角≪ 1 と仮定）---　④

と表せるので，式③と式④から

$$\frac{y_i^L - y_{i-1}^R}{l} = \frac{Q_{i-1}^R}{T}$$

上式を書き直すと

$$y_i^L = y_{i-1}^R + \frac{l}{T} Q_{i-1}^R$$



である．弦上の質量 m の両側に作用するせん断力 Q は等しいので

$Q_i^L = Q_{i-1}^R$

以上より，格間マトリックスは次のようになる．

$$\begin{Bmatrix} y \\ Q \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R$$

したがって，点$i = 1 \sim 3$の格間マトリックスは

$$[T_F]_1 = [T_F]_2 = [T_F]_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるため，$\{z\}_0$から$\{z\}_3$までの関係を伝達マトリックスによって表すと，次式を得る．

$$\{z\}_3 = [T_F]_3[T_P]_2[T_F]_2[T_P]_1[T_F]_1\{z\}_0 \qquad \text{-----------} \quad ⑤$$

境界条件は，弦の両端は固定なのでたわみをゼロとして，状態量ベクトルは

$$\{z\}_0 = \{0 \quad Q\}_0^T, \qquad \{z\}_3 = \{0 \quad Q\}_3^T$$

となる．式⑤の伝達マトリックスを順次演算すると

$$\{z\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} T_{12}Q_0 \\ T_{22}Q_0 \end{Bmatrix}$$

となり，上式の行列の各成分は次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= \left(\frac{ml}{T}\right)^2 \omega^4 - 3\frac{ml}{T}\omega^2 + 1 \\ T_{12} &= \frac{l}{T}\left\{\left(\frac{ml}{T}\right)^2 \omega^4 - 4\frac{ml}{T}\omega^2 + 3\right\} \\ T_{21} &= \frac{m^2 l}{T}\omega^4 - 2m\omega^2 \\ T_{22} &= \left(\frac{ml}{T}\right)^2 \omega^4 - 3\frac{ml}{T}\omega^2 + 1 \end{aligned}\right\}$$

振動数方程式は，$y_3 = 0$（右側の固定端）の条件から $T_{12} = 0$とすれば求まる．$T_{12} = 0$ より

$$\left(\frac{ml}{T}\right)^2 \omega^4 - 4\frac{ml}{T}\omega^2 + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{ml}{T}\omega^2 - 1\right)\left(\frac{ml}{T}\omega^2 - 3\right) = 0$$

の解として，固有角振動数は $\omega_{n1} < \omega_{n2}$とすると，次のように求まる

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{T}{ml}}, \quad \omega_{n2} = \sqrt{\frac{3T}{ml}}$$

固有振動モードは，$y_0 = 0,\ Q_0 = 1$ とおくと，状態量ベクトル$\{z\}_0 = \{0 \quad 1\}_0^T$となり，以下の伝達マトリックスを順次演算して求める．

$$\{z\}_1 = [T_P]_1[T_F]_1\{z\}_0 \qquad \text{-----------} \quad ⑥$$

$$\{z\}_2 = [T_P]_2[T_F]_2[T_P]_1[T_F]_1\{z\}_0 \qquad \text{-----------} \quad ⑦$$

式⑥と式⑦の行列演算から，位置 1 ($x= l$)と位置 2 ($x = 2l$)における質量 m のたわみが，次のように求まる．

$$y_1 = \frac{l}{T},$$
$$y_2 = \frac{2l}{T} - \frac{ml^2}{T^2}\omega^2 \qquad \text{-----------} \quad ⑧$$

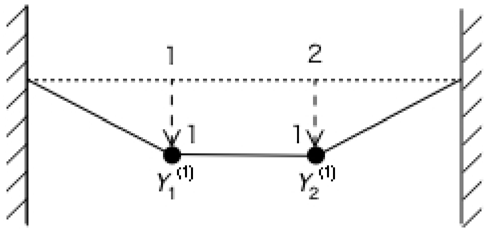
1 次の固有振動モードは，$\omega_{n1} = \sqrt{T/(ml)}$ を式⑧に代入すると，$y_2 = l/T$ となり

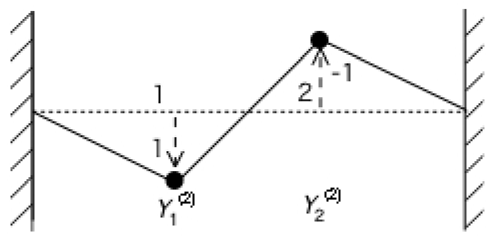
$$\begin{Bmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{l}{T} \\ \frac{l}{T} \end{Bmatrix} = \frac{l}{T}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2 次の固有振動モードは，$\omega_{n2}=\sqrt{3T/(ml)}$ を式⑧に代入すると，$y_2=-l/T$ となり

$$\begin{Bmatrix} Y_1^{(2)} \\ Y_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{l}{T} \\ -\dfrac{l}{T} \end{Bmatrix}=\frac{l}{T}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

1 次と 2 次の弦の固有振動モードを，以下に図示する．





7.10　（別　解）２自由度系の運動方程式を導出して，弦の固有角振動数と固有振動モードを求める．

弦（ここでは，分布質量を無視して張力による復元力だけを考慮）に付いた 2 つの（集中）質量 m の下向きの運動方程式は，自由物体線図から位置 1 の質量 m について

$$m\ddot{y}_1=-T\sin\theta_1+T\sin\theta_1{}'$$

ここで，微小角を仮定すると　$\sin\theta_1\cong\tan\theta_1\cong\frac{y_1}{l}$，$\sin\theta_1{}'\cong\tan\theta_1{}'\cong\frac{y_2-y_1}{l}$ と書ける．

上式を書き直すと

$$m\ddot{y}_1=-T\frac{y_1}{l}+T\frac{y_2-y_1}{l} \qquad \text{------------} \quad ①$$

位置 2 の質量 m について

$$m\ddot{y}_2=-T\sin\theta_2-T\sin\theta_2{}'$$

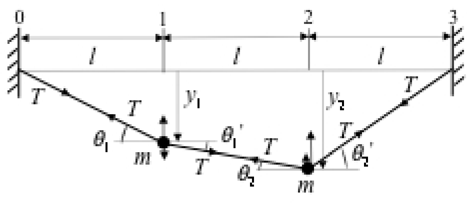
ここで，微小角を仮定すると　$\sin\theta_2\cong\tan\theta_2\cong\frac{y_2-y_1}{l}$，$\sin\theta_2{}'\cong\tan\theta_2{}'\cong\frac{y_2}{l}$ と書ける．

上式を書き直すと

$$m\ddot{y}_2=-T\frac{y_2-y_1}{l}-T\frac{y_2}{l} \qquad \text{------------} \quad ②$$

式①，②の運動方程式を，行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\frac{T}{l} & -\frac{T}{l} \\ -\frac{T}{l} & 2\frac{T}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{-----} \quad ③$$



自由振動の一般解を，以下のように仮定する．

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t+\phi) \qquad \text{--------} \quad ④$$

上式④を運動方程式③に代入すると，次の固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 2\frac{T}{l}-m\omega^2 & -\frac{T}{l} \\ -\frac{T}{l} & 2\frac{T}{l}-m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{-----------} \quad ⑤$$

上式の係数行列式=0 とすると，次の振動数方程式を得る．

$$\left(2\frac{T}{l}-m\omega^2\right)^2-\left(\frac{T}{l}\right)^2=\left(3\frac{T}{l}-m\omega^2\right)\left(\frac{T}{l}-m\omega^2\right)=0$$

上式の解として，固有角振動数を $\omega_{n1}<\omega_{n2}$とすると

$$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{T}{ml}},\ \ \omega_{n2}=\sqrt{\frac{3T}{ml}}$$

となる．次に固有振動モード（振幅比）を求める．

1）1 次モード： $\omega^2=\omega_{n1}^2$を式⑤の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

$$\left(2\frac{T}{l}-\frac{T}{l}\right)Y_1^{(1)}-\frac{T}{l}Y_2^{(1)}=0$$

上式を整理すると

$$Y_1^{(1)}-Y_2^{(1)}=0$$

したがって，振幅比は

$$\frac{Y_2^{(1)}}{Y_1^{(1)}}=1\qquad \text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}Y_1^{(1)}\\Y_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

2）2 次モード：$\omega^2=\omega_{n2}^2$を式⑤の係数行列に代入して連立方程式を解くと，第 1 式から

$$\left(2\frac{T}{l}-3\frac{T}{l}\right)Y_1^{(2)}-\frac{T}{l}Y_2^{(2)}=0$$

上式を整理すると

$$-Y_1^{(2)}-Y_2^{(2)}=0$$

したがって，振幅比は

$$\frac{Y_2^{(2)}}{Y_1^{(2)}}=-1\quad \text{すなわち}\ \begin{Bmatrix}Y_1^{(2)}\\Y_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

［数値解］ MATLAB によるべき乗法プログラムを利用して，固有値 $\lambda=\omega^2$（ω：固有角振動数）と固有振動モードを計算した結果を以下に示す．計算では $m=1$，$T/l=1$ とおく．弦の 2 つの（集中）質量 m の運動方程式は，次式で与えられる．

$$m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\frac{T}{l}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

べき乗法による一般化固有値問題の解

```
固有値λ　1 次　 2 次
ans =
     1       3
固有振動モード {X}　1 次　 2 次
ans =
    1.0000      1.0000
    1.0000     -1.0000
```

[演習問題 7.10]と同一の固有値（$\lambda=\omega^2$）と固有振動モードが得られている．