

## [演習問題 5]

5.1 棒の縦振動における  $i$  次の固有角振動数の公式は、表 5.1 に与えられている。

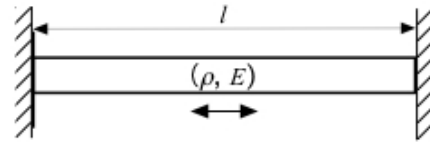
長さ  $l = 5$  (m), 質量密度  $\rho = 8000$  (kg/m<sup>3</sup>), 縦弾性率  $E = 210 \times 10^9$  (Pa) なので

(1) 両端固定の場合：振動数方程式

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Leftrightarrow \omega_i = \frac{i\pi}{l} c \quad (i = 1, 2, \dots)$$

したがって、基本固有角振動数( $i=1$ )は

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{8000}} = 3219.17 \approx 3.22 \times 10^3 \text{ (rad/s)}$$

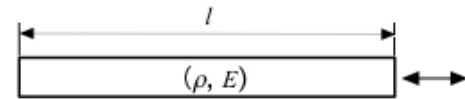


(2) 両端自由の場合：振動数方程式

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Leftrightarrow \omega_i = \frac{i\pi}{l} c \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

したがって、基本固有角振動数( $i=1$ )は、(1)の両端固定の場合と同様に

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{8000}} = 3219.17 \approx 3.22 \times 10^3 \text{ (rad/s)}$$

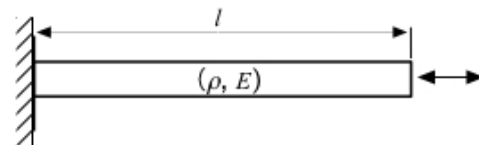


(3) 一端固定・他端自由の場合：振動数方程式

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0 \Leftrightarrow \omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2l} c \quad (i = 1, 2, \dots)$$

したがって、基本固有角振動数( $i=1$ )は

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{2 \times 5} \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{8000}} = 1609.58 \approx 1.61 \times 10^3 \text{ (rad/s)}$$



5.2 両端固定で中央に集中質量  $m$  が付けられて、張力  $T$  が作用する弦（線密度  $\rho'$ ）について、横振動の固有角振動数を求める振動数方程式を導出する。

長さ  $l$  の弦の自由横振動の一般解は、表 5.1 から  $u = y$  とおくと

$$y(x, t) = T(t)X(x) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left( C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x \right) \quad \text{ここで} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho'}}$$

弦の両端固定の境界条件  $X(0)=0, X(l)=0$  から  $C=0$  となる。弦のたわみ  $y(x, t)$  の連続性から、左右の弦の一般解は次のように与えられる。

$$y_1(x, t) = D \sin \left( \frac{\omega x}{c} \right) \sin \omega t \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$y_2(x, t) = D \sin \left\{ \frac{\omega(l-x)}{c} \right\} \sin \omega t \quad l/2 \leq x \leq l$$

たわみ関数  $y_1(x, t)$  において  $x \rightarrow l-x$  おくと,  $x = l/2$

に対して対称なグラフとなり  $y_1(l/2, t) = y_2(l/2, t)$  となる.

集中質量  $m$  の上下方向の運動方程式は

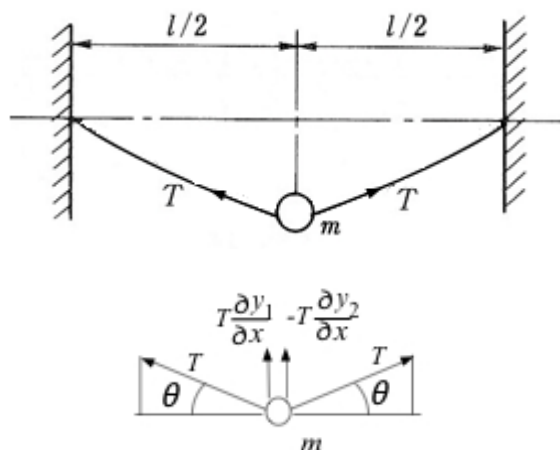
$$m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -T \frac{\partial y_1}{\partial x} + T \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad (x = l/2) \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$y(x, t)$  を  $x$  および  $t$  について偏微分すると

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -D \omega^2 \sin \frac{\omega x}{c} \sin \omega t$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = D \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \sin \omega t$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = -D \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega(l-x)}{c} \sin \omega t$$



上の3つの式を,  $x = l/2$  での運動方程式①に代入すると

$$-m D \omega^2 \sin \frac{\omega l}{2c} \cdot \sin \omega t = -2 D T \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{2c} \cdot \sin \omega t \quad (\text{ただし, } T = \rho' c^2)$$

上式を整理すると

$$m \omega^2 \tan \frac{\omega l}{2c} = 2 T \frac{\omega}{c}$$

を得る. したがって, 振動数方程式は上式を変形して

$$\frac{\omega l}{2c} \tan \frac{\omega l}{2c} = \frac{\rho' l}{m} \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

となる. 上式②は  $\frac{\omega l}{2c}$  についての超越方程式となり, 解析的に解くことができないので, 数値解法によって解を求める必要がある. ここで, 特別な場合を考えてみよう.

1)  $m = 0$  の場合: 式②の右辺は無限大となるため,  $\tan \frac{\omega l}{2c} = \sin \frac{\omega l}{2c} / \cos \frac{\omega l}{2c} \rightarrow \infty$  から

振動数方程式は  $\cos \frac{\omega l}{2c} = 0$  となり, 一端固定・他端自由で長さ  $l/2$  の弦に対応する (表 5.1)

2)  $m \rightarrow \infty$  の場合: 式②の右辺は0になるため,  $\tan \frac{\omega l}{2c} = \sin \frac{\omega l}{2c} / \cos \frac{\omega l}{2c} \rightarrow 0$  から振動数方程式は

$\sin \frac{\omega l}{2c} = 0$  となり, 両端固定の長さ  $l/2$  の弦に対応する (表 5.1)

3)  $\rho' l/m \ll 1$  (質量  $m$  に比較して弦の質量  $\rho' l$  が小さい) の場合: 式②の左辺をテイラー展開 (付録 A5)

すると,  $\frac{\omega l}{2c} \tan \frac{\omega l}{2c} = \frac{\omega l}{2c} \left\{ \left( \frac{\omega l}{2c} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\omega l}{2c} \right)^3 + \dots \right\} = \frac{\rho' l}{m}$  となり, 3次以上の項を無視すると  $\left( \frac{\omega l}{2c} \right)^2 = \frac{\rho' l}{m}$  と

なり, 基本固有角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{4T}{l} \right)}$  を得る. この解は, 以下に示す補足問題の解と一致する.

(補足問題) 弦の質量が集中質量  $m$  と比較して無視 (すなわち、張力による復元力だけを考慮) できる場合、質量  $m$  についての上下方向の運動方程式は、以下に示す自由物体線図から

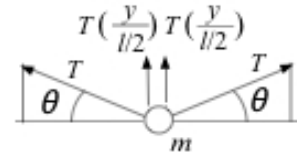
$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin \theta - T \sin \theta \quad \text{ここで、微小角 } \theta \ll 1 \text{ と仮定すると、} \sin \theta \cong \tan \theta \text{ となるため}$$

$$\text{上式を書き直すと、運動方程式は} \quad m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2T}{l} y - \frac{2T}{l} y$$

両辺を  $m$  で除して整理すると、 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{4T}{ml} y = 0$ . この式系の固有角振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4T}{ml}} = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{4T}{l} \right)}$$

となる. 質量を無視した弦の等価ばね定数は、 $k_{eq} = \frac{4T}{l}$  となる.



### 5.3 変断面棒の縦振動の固有角振動数を求める振動数方程式を導出する.

この変断面棒の断面積は  $Ae^{-2\alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ) で表されたとする. ここで、軸方向の変位を  $u(x, t)$ , 軸力を  $P(x, t)$  とすると、式(5.4)から

$$P = A\sigma = AE\varepsilon = AE \frac{\partial u}{\partial x}$$

これより、変断面棒の縦方向の運動方程式は

$$\rho(Ae^{-2\alpha x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( EAe^{-2\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = EA \left( -2\alpha e^{-2\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{-2\alpha x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2\alpha EA \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

両辺を  $\rho$  で除して、 $\sqrt{E/\rho} = c$  とすると次式を得る.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{-----} \quad (1)$$

上式①の一般解を変数分離法によって  $u(x, t) = X(x)T(t)$

と仮定して代入すると、上式から

$$\begin{aligned} X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= -2\alpha c^2 T(t) \frac{dX(x)}{dx} + c^2 T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= \frac{1}{X(x)} \left( -2\alpha c^2 \frac{dX(x)}{dx} + c^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) \end{aligned}$$

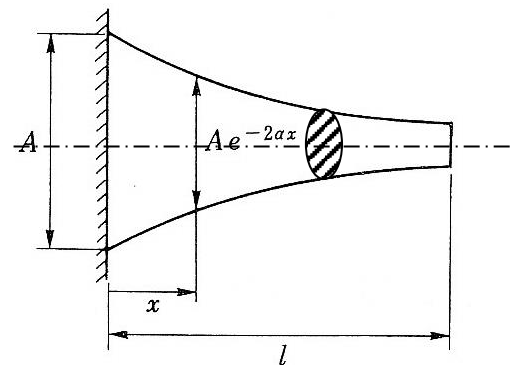
ここで、(左辺) = (右辺) =  $-\omega^2$  (定数) とおくと

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2 \quad \text{-----} \quad (2)$$

$$\frac{1}{X(x)} \left( -2\alpha c^2 \frac{dX(x)}{dx} + c^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) = -\omega^2 \Rightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - 2\alpha \frac{dX(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (c^2 = E/\rho) \quad \text{-----} \quad (3)$$

ここで、式③の基本解を  $X(x) = e^{\lambda x}$  として上式に代入すると

$$(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \frac{\omega^2}{c^2}) e^{\lambda x} = 0$$



この特性方程式を2次方程式の解の公式(付録A5)で解くと、振動するためには、次の解を持つ必要がある。

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \alpha \pm j\mu \quad \text{ここで} \quad \mu = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$$

一般解は、2つの基本解の線形結合で表せるので

$$X(x) = e^{(\alpha+j\mu)x} + e^{(\alpha-j\mu)x} = e^{\alpha x}(C \cos \mu x + D \sin \mu x)$$

変断面棒の両端の境界条件  $X(0) = 0$ ,  $\frac{dX(l)}{dx} = 0$  (自由端) より、上式の任意定数は

$$\left. \begin{aligned} C &= 0 \\ De^{\alpha l}(\alpha \sin \mu l + \mu \cos \mu l) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

となる。したがって、上式の第2式から次の振動数方程式を得る。

$$\alpha \sin \mu l + \mu \cos \mu l = 0 \quad (\text{ただし, } \alpha, c \text{ は既知})$$

上式を書き直すと

$$\frac{1}{\mu l} \tan \mu l = -\frac{1}{\alpha l}$$

上式は  $\mu l$  に関する超越方程式となり、解析的には解けないため、数値解法を使用する必要がある。

ここで、特別な場合を考えてみよう。

$\alpha = 0$  (断面一様な棒) のとき、 $\frac{1}{\mu l} \tan \mu l = \frac{1}{\mu l} \frac{\sin \mu l}{\cos \mu l} \rightarrow \infty$  から分母  $\cos \mu l = \cos \frac{\omega l}{c} = 0$  となり、一端固

定・他端自由の断面一様な棒の振動数方程式(表5.1)と一致する。

**5.4** 一端固定で他端に円板(軸心周りの慣性モーメント  $J$ ) をもつ軸のねじり振動の固有角振動数を求める振動数方程式を導出する。軸の横弾性率を  $G$ , 断面2次極モーメントを  $I_p$ , 長さを  $l$  とする。任意断面の軸周りのねじり角を  $\theta(x, t)$  とすると、軸の両端での境界条件は

$$\theta(0, t) = 0, \quad J \frac{\partial^2 \theta(l, t)}{\partial t^2} = -GI_p \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

上式の第2式は、円板に作用する慣性トルクと軸の復元トルクとの釣り合いを表わす。ここで、軸の自由振動の一般解を、表5.1から

$$\theta(x, t) = \Theta(x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \text{ここで} \quad \Theta(x) = C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x$$

と仮定して、式①に代入すると

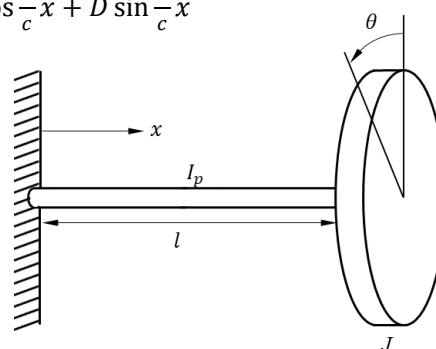
$$\left. \begin{aligned} C &= 0 \\ -J\omega^2 D \sin \frac{\omega l}{c} \sin \omega t &= -GI_p \frac{\omega}{c} D \cos \frac{\omega l}{c} \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

上式の第2式を整理すると、次の振動数方程式を得る。

$$\omega c \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{GI_p}{J} \Leftrightarrow \frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{GI_p l}{Jc^2} = \frac{\rho I_p l}{J} \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

上式は解析的に解くことができない  $\frac{\omega l}{c}$  についての超越方程式となる。

ここで、3つの特別な場合を考えてみよう。



1)  $J=0$  (円板がない) の場合: 式②  $\frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{\omega l}{c} \frac{\sin \frac{\omega l}{c}}{\cos \frac{\omega l}{c}} \rightarrow \infty$  から分母  $\cos \frac{\omega l}{c} = 0$  となり, 一端固定・

他端自由の軸の振動数方程式(表 5.1)と一致する.

2)  $J \rightarrow \infty$  (円板の慣性モーメント  $J$  が非常に大きい) の場合: 式②  $\frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{\omega l}{c} \frac{\sin \frac{\omega l}{c}}{\cos \frac{\omega l}{c}} \rightarrow 0$  から分子  $\sin \frac{\omega l}{c} = 0$  となり, 両端固定の軸の振動数方程式(表 5.1)と一致する.

3)  $\rho I_p l / J \ll 1$  (円板の慣性モーメント  $J$  と比較して軸の慣性モーメント  $\rho I_p l$  が小さい) 場合: 式②の左辺をテイラー展開(付録 A5)すると,  $\frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{\omega l}{c} \left\{ \left( \frac{\omega l}{c} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\omega l}{c} \right)^3 + \dots \right\} = \frac{G I_p l}{J c^2}$  となる. 3 次以上

の項を無視すると  $\left( \frac{\omega l}{c} \right)^2 = \frac{G I_p l}{J c^2}$  となり,  $\omega = \sqrt{\frac{1}{J} \left( \frac{G I_p l}{l} \right)}$  を得る. この結果は, 教科書の例題 2.3 の弾性軸のねじり振動系の固有角振動数  $\omega_n$  と一致する(例題 2.3 では,  $\rho I_p l / J \ll 1$  の条件下で弾性軸のねじり振動系の固有角振動数  $\omega_n$  を求めていることに注意されたい)

## 5.5 一端固定・他端自由の軸の自由ねじり振動の一般解を求める.

与えられた初期条件は

$$\theta(x, 0) = f(x) = \frac{\theta_0}{l} x, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = g(x) = 0$$

一般解は, 表 5.1 からつぎのように与えられる.

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \left( C_i \cos \frac{\omega_i}{c} x + D_i \sin \frac{\omega_i}{c} x \right) \quad ①$$

一端固定( $x=0$ ), 他端自由( $x=l$ ) の軸の境界条件から

$x=0$  で

$$C_i \cos \frac{\omega_i}{c} 0 + D_i \sin \frac{\omega_i}{c} 0 = 0 \Rightarrow C_i = 0$$

$x=l$  で

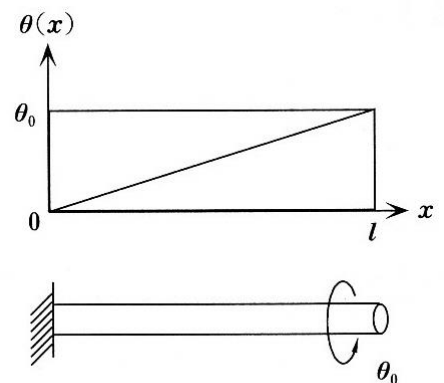
$$\frac{d}{dx} \left( C_i \cos \frac{\omega_i}{c} x + D_i \sin \frac{\omega_i}{c} x \right) = -C_i \frac{\omega_i}{c} \sin \frac{\omega_i}{c} x + D_i \frac{\omega_i}{c} \cos \frac{\omega_i}{c} x \Rightarrow D_i \frac{\omega_i}{c} \cos \frac{\omega_i l}{c} = 0$$

から

$$\frac{\omega_i l}{c} = \frac{(2i-1)\pi}{2} \Rightarrow \omega_i = \frac{(2i-1)\pi c}{2l} \quad \text{-----} \quad ② \quad \text{表 5.1 参照}$$

また, 任意定数  $A_i$  は式(5.36)より, 初期ねじり角の分布関数  $f(x)$  を代入して

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\theta_0}{l} x \sin \frac{j\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{2\theta_0}{l^2} \left\{ \left[ \frac{2l}{(2i-1)\pi} x \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l} x \right]_0^l - \int_0^l \frac{2l}{(2i-1)\pi} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l} x dx \right\} \end{aligned}$$



$$= \frac{2\theta_0}{l^2} \left\{ \frac{2l}{(2i-1)\pi} \right\}^2 \left[ \sin \frac{(2i-1)\pi}{2l} x \right]_0^l = 2\theta_0 \left\{ \frac{2}{(2i-1)\pi} \right\}^2 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2}$$

任意定数  $B_i$  は式 (5.36) より, 初期ねじり角速度の分布関数  $g(x) = 0$  から  $B_i = 0$ . また 式②から

$$\frac{c}{\omega_i l} = \frac{2}{(2i-1)\pi} \quad \text{また} \quad \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} = (-1)^{i+1} \quad \text{と表示できるので}$$

$$A_i = 2\theta_0 \left( \frac{c}{\omega_i l} \right)^2 (-1)^{i+1}$$

となる. 以上より, 自由ねじり振動の一般解は, 式①から

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\theta_0 \left( \frac{c}{\omega_i l} \right)^2 (-1)^{i+1} \sin \frac{\omega_i}{c} x \cdot \cos \omega_i t$$

ここで,  $\omega_i$  は式②で与えられる.

## 5.6 異なる境界条件をもつはりの曲げ振動の基本固有角振動数を, 公式を利用して求める.

与えられたはりの形状寸法と材料定数は, 以下のとおりである.

長さ  $l = 500$  (cm), 質量密度  $\rho = 8000$  (kg/m<sup>3</sup>), 縦弾性率  $E = 210$  (GPa)

断面形状: 長方形 (幅;  $b = 20$  (cm), 高さ;  $h = 10$  (cm)), 断面2次モーメント  $I = \frac{bh^3}{12}$  (m<sup>4</sup>)

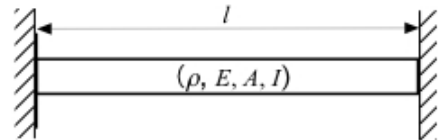
はりの曲げ振動における  $i$  次の固有角振動数  $\omega_i$  は, 表 5.4 より

$$\omega_i = (\beta_i l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

(1) 両端固定はり

1 次の固有角振動数  $\omega_1$  は, 表 5.4 より  $\beta_1 l = 4.730$

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 4.730^2 \times \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0.2 \times 0.1^3}{8000 \times 0.1 \times 0.2 \times 5^4 \times 12}} = 132.4 \text{ (rad/s)}$$

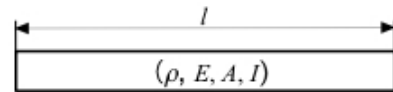


(2) 両端自由はり

1 次の固有角振動数  $\omega_1$  は, 表 5.4 より  $\beta_1 l = 4.730$ ,

したがって (1) の場合と同じ値となる

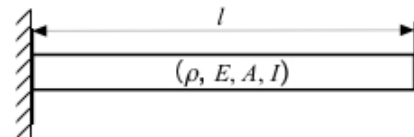
$$\omega_1 = 132.4 \text{ (rad/s)}$$



(3) 一端固定・他端自由はり

1 次の固有角振動数  $\omega_1$  は, 表 5.4 より  $\beta_1 l = 1.875$

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 1.875^2 \times \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0.2 \times 0.1^3}{8000 \times 0.1 \times 0.2 \times 5^4 \times 12}} = 20.8 \text{ (rad/s)}$$



### 5.7 一端固定，他端支持はりの固有角振動数（表 5.3）と固有モード関数を求める．

はりの長さを  $l$ ，断面積を  $A$ ，質量密度を  $\rho$ ，縦弾性率を  $E$ ， はりの軸に沿って作用する分布外力を  $q(x, t)$  とする． はりの曲げ振動の運動方程式は，次の 式(5.47)で与えられる．

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t)$$

分布外力が作用していないときには，  $q(x, t) = 0$  として

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left( c^4 = \frac{EI}{\rho A} \right)$$

この方程式の一般解を変数分離形  $y(x, t) = Y(x)T(t)$  として， 上式に代入する．

$$Y(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c^4 T(t) \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = - \frac{c^4}{Y(x)} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4}$$

ここで， (左辺) = (右辺) =  $-\omega^2$  (定数) とおくと

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{初期値問題}) \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{c^4}{Y(x)} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2}{c^4} Y(x) = 0 \quad (\text{境界値問題}) \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

ここで，  $\omega^2/c^4 = \beta^4$  とおく． 式①は 式(5.17) と同じである． いま， 式②の基本解を  $Y(x) = e^{\lambda x}$  として上式に代入すると

$$(\lambda^4 - \beta^4)e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - j\beta)(\lambda + j\beta)(\lambda - \beta)(\lambda + \beta)$$

これより， この特性方程式の解は  $\lambda = \pm j\beta, \pm\beta$

一般解は 4 つの基本解の線形結合として表現できるので， 式(5.50)と同様に

$$Y(x) = Ae^{j\beta x} + Be^{-j\beta x} + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad \text{-----} \quad \textcircled{3}$$

上式を  $x$  について 2 回まで微分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= \beta(-C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x) \\ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} &= \beta^2(-C_1 \cos \beta x - C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x) \end{aligned} \right\}$$

一端固定，他端支持はりの境界条件より，  $Y(0) = 0, \frac{dY(0)}{dx} = 0, \quad Y(l) = 0, \frac{d^2 Y(l)}{dx^2} = 0$

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_2 + C_4 &= 0 \\ C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l + C_3 \cosh \beta l + C_4 \sinh \beta l &= 0 \\ -C_1 \cos \beta l - C_2 \sin \beta l + C_3 \cosh \beta l + C_4 \sinh \beta l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

上式の第 1，第 2 式より，  $C_3 = -C_1, C_4 = -C_2$ ． この関係式を第 3，第 4 式に代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} C_1(\cosh \beta l - \cos \beta l) + C_2(\sinh \beta l - \sin \beta l) &= 0 \\ C_1(\cosh \beta l + \cos \beta l) + C_2(\sinh \beta l + \sin \beta l) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} \cosh \beta l - \cos \beta l & \sinh \beta l - \sin \beta l \\ \cosh \beta l + \cos \beta l & \sinh \beta l + \sin \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{----} \quad \textcircled{4}$$

$C_1 = C_2 = 0$  以外の解をもつためには、係数行列式  $= 0$  となる必要がある。行列式を展開して整理すると、次の振動数方程式 (表 5.3 p.144) を得る。

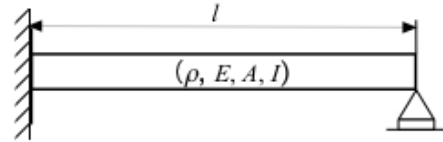
$$\tan \beta l - \tanh \beta l = 0$$

上式は  $\beta l$  に関する超越方程式であり、数値的に解く必要がある。表 5.3 より最初の 3 つの解は

$$\beta_i l = 3.927, \quad 7.069, \quad 10.210 \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる。これから、1 次から 3 次までの固有角振動数は (表 5.4)

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \beta_1^2 c^2 = \left( \frac{3.927}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \omega_2 &= \beta_2^2 c^2 = \left( \frac{7.069}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \omega_3 &= \beta_3^2 c^2 = \left( \frac{10.210}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \end{aligned} \right\}$$



また、対応するモード関数は  $C_1 = -C_3$ ,  $C_2 = -C_4$  の関係を利用して  $C_3, C_4$  を消去すると、式③から

$$Y_i(x) = C_{1(i)} \left\{ (\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x) + \frac{C_{2(i)}}{C_{1(i)}} (\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x) \right\}$$

ただし、 $C_2/C_1$  は式④の 2 つの式から次のように導出することができる。

$$\frac{C_{2(i)}}{C_{1(i)}} = -\frac{\cos \beta_i l - \cosh \beta_i l}{\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l} = -\frac{\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \beta_i l + \sinh \beta_i l}$$

**5.8** 両端固定はりの基本固有角振動数をレイリーの方法によって、与えられたモード関数を利用して近似解を求める。

両端固定はりの境界条件は、一般に以下のように表せる。

$$Y(0) = 0, \quad \frac{dY(0)}{dx} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad \frac{dY(l)}{dx} = 0$$

(1)  $Y_1(x) = Cx(l-x)$  の場合

$$Y_1(0) = Y_1(l) = 0$$

$$\frac{dY_1(x)}{dx} = C(l-2x), \quad \frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} = -2C \quad \text{であり}$$

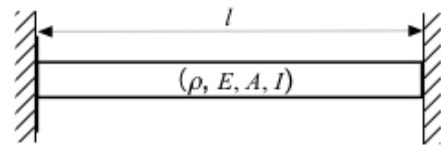
$$\frac{dY_1(0)}{dx} = l (\neq 0), \quad \frac{dY_1(l)}{dx} = -l (\neq 0) \quad \text{であるから、両端でのたわみ角} = 0 \text{ の境界条件を満たさない。}$$

(2)  $Y_1(x) = C \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$  の場合

$$Y_1(0) = Y_1(l) = 0$$

$$\frac{dY_1(x)}{dx} = C \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \quad \frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} = -C \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad \text{であり}$$

$$\frac{dY_1(0)}{dx} = \frac{\pi}{l} (\neq 0), \quad \frac{dY_1(l)}{dx} = -\frac{\pi}{l} (\neq 0) \quad \text{であるから、両端でのたわみ角の境界条件を満たさない。}$$





(3)  $Y_1(x) = C \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \right\}$  の場合

$$\frac{dY_1(x)}{dx} = C \frac{2\pi}{l} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \quad \frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} = -C \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \text{ であり}$$

$Y_1(0) = Y_1'(0) = 0$ ,  $Y_1(l) = Y_1'(l) = 0$  であるから, 両端での境界条件を完全に満たす. 従って, 最も適しているモード関数は式(3)である. このときの基本固有角振動数を求めてみよう.

$$\int_0^l \{Y_1''(x)\}^2 dx = C^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}x\right) dx = C^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}l \quad (\text{倍角の公式—付録 A2.1-2 を使用})$$

$$\int_0^l Y_1^2(x) dx = C^2 \int_0^l \left\{ 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \right\} dx = C^2 \left( l + \frac{1}{2}l \right) = C^2 \frac{3}{2}l \quad (\text{倍角の公式を使用})$$

$$\text{レーリー商を表す 式(5.89) から } \omega_1^2 = \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\int_0^l \{Y_1''(x)\}^2 dx}{\int_0^l Y_1^2(x) dx}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}l}{\frac{3}{2}l}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4} \cong \frac{22.793}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

両端固定はりの基本角振動数の厳密解は表 5.4 から

$$\omega_1 = \frac{(4.730)^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cong \frac{22.37}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

となるため, 式(3)のモード関数を使用したときの基本固有角振動数の近似解は, 厳密解よりもわずかに約 1.9% 大きい.

参考: モード関数(1), (2) による基本固有角振動数は, 同様な手順によって次のように求まる.

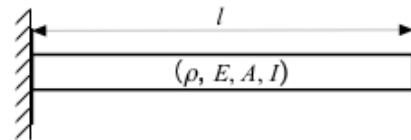
$$(1) \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{30}}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cong \frac{10.954}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2) \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cong \frac{9.870}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

(注) (1), (2) で使用したモード関数は両端でのたわみ = 0 を満足しているが, たわみ角 = 0 を満足していないので, 基本固有角振動数の近似解の精度が著しく低い.

**5.9** 一端固定・他端自由(片持ち)はりの基本固有角振動数を, レイリーの方法によって与えられたモード関数を利用して近似解を求める.

$$Y_1(x) = C \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right\} \quad \text{ここで, } C \text{ は任意定数}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_1'(x) &= C \frac{\pi}{2l} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \\ Y_1''(x) &= C \frac{\pi^2}{4l^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \end{aligned} \right\}$$



から, 並進運動エネルギー  $T$  とポテンシャル・エネルギー  $U$  のそれぞれの最大値は, 式(5.88)から

$$T_{\max} = \frac{\omega_1^2}{2} \int_0^l \rho A Y_1^2(x) dx = C^2 \frac{\omega_1^2 \rho A}{2} \int_0^l \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right\}^2 dx = C^2 \frac{\omega_1^2 \rho A}{2} \left( \frac{3}{2}l - \frac{4l}{\pi} \right) = C^2 \frac{\omega_1^2 \rho A l}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \{Y_1''(x)\}^2 dx = C^2 \frac{EI}{2} \int_0^l \left\{ \frac{\pi^2}{4l^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right\}^2 dx = C^2 \frac{\pi^4 EI}{32l^4} \int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right) dx = C^2 \frac{\pi^4 EI}{64l^3}$$

式(5.85)の $T_{max} = U_{max}$ より、 $\omega_1^2$ について整理すると

$$\frac{\omega_1^2 \rho A l}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = \frac{\pi^4 EI}{64l^3}, \quad \omega_1^2 = \frac{\frac{\pi^4 EI}{32l^4}}{\rho A \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{32}}{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cdot \frac{1}{l^2} \cong \frac{3.664}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

上の近似解は、表5.4の基本固有角振動数の厳密解  $\omega_1 = \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$  より約4.21%大きい。

(注) このモード関数は固定端での変位境界条件を満足しているが、自由端での外力境界条件の1つを満足しないため、近似解の精度が少し低下する。  $Y_1(0) = Y_1'(0) = 0, Y_1''(l) = 0, Y_1'''(l) \neq 0$

**5.10** 一端固定・他端自由(片持ち)はりの基本固有角振動数をレイリーの方法によって、与えられたモード関数から近似解を求める。

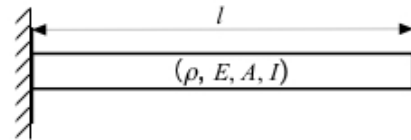
1次モード関数  $Y_1(x) = C\{(x/l)^4 - 4(x/l)^3 + 6(x/l)^2\}$  , ここで  $C$  は定数  
 $x$  について2回まで事前に微分すると

$$Y_1(x) = C\{(x/l)^4 - 4(x/l)^3 + 6(x/l)^2\}$$

$$Y_1'(x) = C\{(4/l^4)x^3 - (12/l^3)x^2 + (12/l^2)x\}$$

$$Y_1''(x) = C\{(12/l^4)x^2 - (24/l^3)x + (12/l^2)\}$$

となる。



$$\{Y_1(x)\}^2 = C^2\{(x/l)^4 - 4(x/l)^3 + 6(x/l)^2\}^2 = C^2\{(x/l)^8 - 8(x/l)^7 + 28(x/l)^6 - 48(x/l)^5 + 36(x/l)^4\}$$

$$\{Y_1''(x)\}^2 = 144C^2\{(1/l^8)x^4 - (4/l^7)x^3 + (6/l^6)x^2 - (4/l^5)x + (1/l^4)\}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \{Y_1(x)\}^2 dx &= C^2 \frac{104}{45} l \\ \int_0^l \{Y_1''(x)\}^2 dx &= C^2 \frac{144}{5l^3} \end{aligned} \right\}$$

はりの運動エネルギーの最大値は、式(5.88)から

$$T_{max} = \frac{\omega_1^2}{2} \int_0^l \rho A \{Y_1(x)\}^2 dx = C^2 \frac{104\omega_1^2 \rho A l}{90}$$

はりのポテンシャル・エネルギーの最大値は、式(5.88)から

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \{Y_1''(x)\}^2 dx = C^2 \frac{144EI}{10l^3}$$

式(5.85)の $T_{max} = U_{max}$ から、 $\omega_1^2$ について整理すると

$$\omega_1^2 = \frac{162EI}{13\rho A l^4}, \quad \therefore \omega_1 = \frac{3.53}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

上の近似解は、表5.4の基本固有角振動数の厳密解  $\omega_1 = \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$  よりわずかに約0.4%大きい。

(注) このモード関数はすべての境界条件を満足する。  $Y_1(0) = Y_1'(0) = 0, Y_1''(l) = Y_1'''(l) = 0$

(補足問題の解)

### 5.11 (以前の演習問題 5.3) 問題の説明と解答

両端固定の弦において、図 5.21 のように長さ  $l$  の弦の中央を  $a$  だけ上方に変位させ、静かに放したときの自由横振動の解  $y(x, t)$  を求めよ。ただし、弦に作用する一定張力を  $T$  とする。

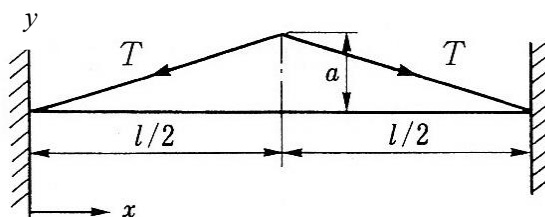


図 5.21 初期たわみをもつ両端固定の弦の横振動

【解答】 両端固定の弦の自由横振動の一般解は、次式で与えられる (表 5.1)。

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi c}{l} t + B_i \sin \frac{i\pi c}{l} t \right) \quad \text{----- ①}$$

ここで、 $c = \sqrt{T/\rho'}$  : 弦のたわみ波の伝ば速度

任意定数  $A_i, B_i$  を、式 (5.36) から求めると

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \\ B_i &= \frac{2}{l\omega_i} \int_0^l g(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \quad \text{----- ②}$$

$$\text{----- ③}$$

弦の初期たわみ分布を  $y(x, 0) = f(x)$ 、初期たわみ速度分布を  $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x)$  とおく。

初期たわみ形状を表す関数  $f(x)$  は、図 5.21 に示す弦の形状から

$$0 \leq x \leq l/2 \text{ の範囲} \quad l/2 \leq x \leq l \text{ の範囲}$$

$$f(x) = \frac{2a}{l} x \quad f(x) = \frac{2a}{l} (l - x)$$

と書ける。したがって、 $f(x)$  を式②に代入すると

$$A_i = \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l/2} \frac{2a}{l} x \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{2a}{l} (l - x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \right\}$$

なる。上式の各項を部分積分(付録 A2.2)して計算すると

$$\int_0^{l/2} \frac{2a}{l} x \sin \frac{i\pi x}{l} dx = -\frac{2a}{i\pi} \cos \frac{i\pi}{2} + \frac{2al}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2}$$

$$\int_{l/2}^l \frac{2a}{l} (l - x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{2a}{i\pi} \cos \frac{i\pi}{2} - \frac{2al}{i^2\pi^2} \sin i\pi + \frac{2al}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2}$$

よって

$$A_i = \frac{2}{l} \left( \frac{4al}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} \right) = \frac{8a}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} = \frac{8a}{\pi^2} \frac{1}{i^2} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \quad (i = 1, 3, 5 \cdots)$$

一方、初期たわみ速度分布は  $g(x) = 0$  なので、式③から  $B_i = 0$  となる。

したがって、両端固定の弦の自由横振動の一般解は、式①から次のように求まる。

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \left( \frac{8a}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} \right) \cos \frac{i\pi c}{l} t \cong \frac{8a}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5}^9 \left\{ \frac{1}{i^2} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \right\} \sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \cos \frac{i\pi c}{l} t$$

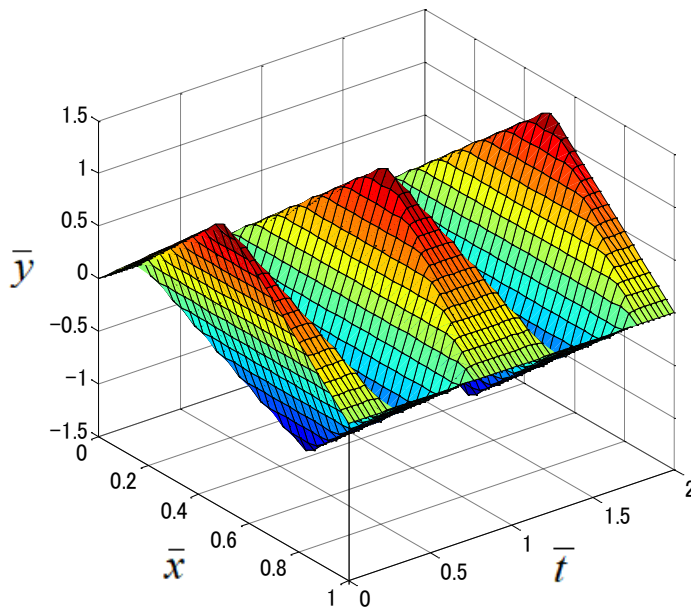
上式から弦のたわみの時間的変化を、無次元化した3次元図によって以下に示す。級数の総和は、 $i=9$  として作図した。時刻  $\bar{t} = 0$  での  $(\bar{x}, \bar{y})$  平面内の弦のたわみ形状が、初期たわみ形状（図 5.21 参照）に対応している。

3次元座標軸の説明

無次元化した弦の位置座標： $\bar{x} = x/l$  ( $0 < \bar{x} < 1$ )

無次元化したたわみ座標： $\bar{y} = y/(\frac{8a}{\pi^2})$  最大たわみの位置は、 $\bar{x}=0.5$

無次元化した時間座標： $\bar{t} = t/T_0$ ,  $T_0 = 2l/c$  (たわみ波が弦を1往復する時間)



両端固定の弦の自由横振動の一般解の3次元表示図