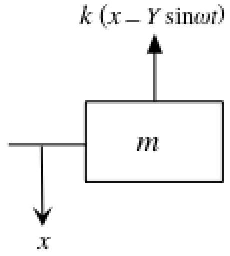
[演習問題 6]

6.1　サイズモ系の運動方程式は自由物体線図から



$$m\ddot{x} = -k(x-y)$$

ここで，$y(t) = Y\sin\omega t$（測定物の調和変位振動）

質量 m の相対変位を$z(t) = x - y$ とすると　$\ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$よって上式は

$$m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y\sin\omega t$$

変形して

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = \omega^2 Y\sin\omega t$$

強制振動の特殊解を$z(t) = Z\sin\omega t$と仮定して，上式に代入すると

$$(\omega_n^2 - \omega^2)Z = \omega^2 Y$$

これより相対変位の振幅 Zと測定面の変位振幅 Yとの比を求める．題意より $f = 15$ Hz, $f_n = 5$ Hz から

$$M = \frac{Z}{Y} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{15^2}{5^2 - 15^2} = -\frac{9}{8}$$　（ここで，$\omega = 2\pi f$，$\omega_n = 2\pi f_n$）

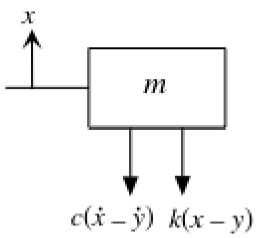
よって，測定面の変位振幅 Yは，相対変位振幅 $Z = 150$ μm から

$$Y = \frac{Z}{M} = -\frac{8}{9}\cdot 150 = -\frac{400}{3} = -133 \ (\mu\mathrm{m})$$

負号はサイズモ振動系の相対変位 $z(t)$の位相が，測定面の変位 $y(t)$の位相よりも 180°（π）遅れていることを表している．測定面の変位振幅 Yは絶対値をとり 133 μm となる．

（注）$y(t) = -133\sin\omega t = 133\sin(\omega t + \pi)$，　$z(t) = 150\sin\omega t$

6.2　減衰系の運動方程式は自由物体線図から



$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$$

質量 m の相対変位 $z(t) = x - y$ で表すと，上式は

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

上式の両辺を m で除して，整理すると

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = \omega^2 Y\sin\omega t \qquad \text{-------} \quad ①$$

ただし，$\omega_n = \sqrt{k/m}$，$\zeta = c/2\sqrt{mk}$ である．

強制振動の特殊解を，以下のように仮定する．

$$z(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \qquad \text{-------} \quad ②$$

式②を式①に代入して，両辺の係数比較を行う．

$$-\omega^2(C\cos\omega t + D\sin\omega t) + 2\zeta\omega_n(-\omega C\sin\omega t + \omega D\cos\omega t) + \omega_n^2(C\cos\omega t + D\sin\omega t) = \omega^2 Y\sin\omega t$$

上式を，$\cos\omega t$と$\sin\omega t$に分けて整理すると

$$\left(-\omega^2 C + 2\zeta\omega_n\omega D + \omega_n^2 C\right)\cos\omega t + (-\omega^2 D - 2\zeta\omega_n\omega C + \omega_n^2 D)\sin\omega t = \omega^2 Y\sin\omega t$$

両辺の cos と sin の係数比較をすると，次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}(\omega_n^2-\omega^2)C+2\zeta\omega_n\omega D=0\\ -2\zeta\omega_n\omega C+(\omega_n^2-\omega^2)D=\omega^2 Y\end{aligned}\right\}$$

上式を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix}(\omega_n^2-\omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega\\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2-\omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C\\ D\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \omega^2 Y\end{Bmatrix}$$

左辺の逆行列(**付録 A3-10**)をとり，任意定数 C, D について解く．

$$\begin{Bmatrix}C\\ D\end{Bmatrix}=\frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}(\omega_n^2-\omega^2) & -2\zeta\omega_n\omega\\ 2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2-\omega^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ \omega^2 Y\end{Bmatrix}$$

右辺の行列と列ベクトルとの積の演算によって，上式から

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{-2\zeta\omega_n\omega^3 Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\\ D&=\frac{(\omega_n^2-\omega^2)\omega^2 Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\end{aligned}\right\}$$

となる．特殊解$z(t)$の正弦関数および余弦関数の係数が分かったので，合成公式(**付録 A2.1-5**)により

$$z(t)=Z\sin(\omega t-\phi)$$

のように表すと，相対変位振幅 $Z=\sqrt{C^2+D^2}$ となり

$$Z=\frac{(\omega/\omega_n)^2 Y}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

よって，相対変位振幅倍率：

$$M=\frac{Z}{Y}=\frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

位相遅れ角：

$$\phi=\tan^{-1}\frac{-C}{D}=\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right\}=\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right\}$$

となる．与えられた値($\zeta=0.6, \omega=4\pi, \omega_n=8\pi,\ Y=350\ \mu\mathrm{m}$)を代入する．　ω/ω_n＝1/2 なので

$$M=\frac{Z}{Y}=\frac{(1/2)^2}{\sqrt{\{1-(1/2)^2\}^2+\{2\times0.6\times(1/2)\}^2}}=\frac{0.250}{0.960}=0.260$$

となる．したがって

相対変位振幅： $Z=YM=350\times0.260=91.1\ \ (\mu\mathrm{m})$

位相遅れ角：　$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\times0.6\times1/2}{3/4}\right)=0.6747\ (\mathrm{rad})=38.66°$

となるため，変位振動計で記録される相対変位波形は，次のようになる．

$$z(t)=91.1\sin(4\pi t-0.674)\qquad(\mu\mathrm{m})$$

6.3　[演習問題 6.1]より減衰のない（$\zeta=0$）場合，加速度計における質量 m の運動方程式は

$$\ddot{z}+\omega_n^2 z=\omega^2 Y\sin\omega t\qquad \text{----------}\quad ①$$

ただし，相対変位 $z(t)=x-y$，$y(t)=Y\sin\omega t$なので，測定物の加速度の振幅は　$|\ddot{y}|=\omega^2 Y$と表すこ

とができる．強制振動の特殊解として，上式の右辺の外力項を考慮して以下を仮定する．

$z(t) = Z\sin\omega t$　　---------- ②

式②を式①に代入すると

$(\omega_n^2 - \omega^2)Z = \omega^2 Y$

よって，与えられた値（$\omega = 2\pi\cdot 15$, $\omega_n = 2\pi\cdot 100$, $Z = 5\ \mu\mathrm{m}$）を上式に代入すると

$|\ddot{y}| = \omega^2 Y = \{(100\times 2\pi)^2 - (15\times 2\pi)^2\}\cdot 5 = 1.93\times 10^6$（$\mu\mathrm{m/s^2}$）

したがって，加速度計で記録される加速度は，次のようになる．

$|\ddot{y}| = 1.93\times 10^6\ (\mu\mathrm{m/s^2}) = 1.93\ \ (\mathrm{m/s^2})$

［別　解］

例題 6.2 と同様に**式(6.12)**を使っても解ける．式（6.12）において$\zeta = 0$ を代入すると

$$\frac{-\omega_n^2 Z}{\ddot{Y}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2}}$$

上式から　ω/ω_n＝0.15＜1 であるため，根号内は正となるためそのまま開き，$\ddot{Y}$について解くと

$\ddot{Y} = -(\omega_n^2 - \omega^2)Z = -\{(100\times 2\pi)^2 - (15\times 2\pi)^2\}\cdot 5 = -1.93\times 10^6\ (\mu\mathrm{m/s^2}) = -1.93\ (\mathrm{m/s^2})$

負号は加速度計の加速度の位相が，実際の測定面の加速度の位相よりも 180°（π）遅れていることを表している．絶対値をとれば前述の解と同様となる．

6.4　パワースペクトル密度の計算問題

式(6.22)からパワースペクトル密度は，自己相関関数によって次式で定義される．

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

(1) 自己相関関数

$R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\cos 2\pi f_0\tau$　　----------（**表 6.2 の(1)のグラフ**参照）

$R_x(\tau)$は偶関数であるため，オイラーの公式**(1.11)**よって余弦項のみ考えればよい．

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\cos 2\pi f_0\tau\cos 2\pi f\tau\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\frac{1}{2}\{\cos 2\pi(f+f_0)\tau + \cos 2\pi(f-f_0)\tau\}d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\{\cos 2\pi(f+f_0)\tau + \cos 2\pi(f-f_0)\tau\}d\tau \quad \text{------} \quad ①$$

（上式の τ の積分範囲で正側のみを考えることにより，τ の絶対値は外れる）

次に，先ず上式①の括弧中の第 1 項 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi(f+f_0)\tau\, d\tau$ について考える．

部分積分(**付録 A2.2**)を適用して

$$\left[e^{-\alpha\tau}\frac{1}{2\pi(f+f_0)}\sin 2\pi(f+f_0)\tau\right]_0^{\infty} + \frac{\alpha}{2\pi(f+f_0)}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\sin 2\pi(f+f_0)\tau\, d\tau$$

上式の第 2 項の積分項のみを，さらに部分積分すると

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\sin 2\pi(f+f_0)\tau\,d\tau=\left[e^{-\alpha\tau}\frac{1}{2\pi(f+f_0)}\cos 2\pi(f+f_0)\tau\right]_0^\infty-\frac{\alpha}{2\pi(f+f_0)}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi(f+f_0)\tau\,d\tau$$

ここで，上式の右辺の第 2 項を

$$A=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi(f+f_0)\tau\,d\tau$$

とおいて，[−] 内の積分計算を行うと

$$A=[0]+\frac{\alpha}{2\pi(f+f_0)}\left[\frac{1}{2\pi(f+f_0)}-\frac{\alpha}{2\pi(f+f_0)}A\right]$$

上式から A について解くと

$$A=\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2(f+f_0)^2}$$

また，同様に式①の括弧中の第 2 項を考えると

$$A=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi(f-f_0)\tau\,d\tau=\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2(f-f_0)^2}$$

したがって，パワースペクトル密度は両者の和から

$$S_x(f)=\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2(f+f_0)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2(f-f_0)^2}$$

(2) 自己相関関数

$$R_x(\tau)=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau|\le 1\\ 0 & |\tau|\ge 1\end{cases}$$ ----------（**表 6.2 の（2）のグラフ**参照）

この関数は偶関数である（ y 軸に対して対称）．パワースペクトル密度の定義に従うと

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^\infty R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_T^\infty 0\cdot\cos 2\pi f\tau\,d\tau+\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\cdot\cos 2\pi f\tau\,d\tau+\int_{-T}^0\left(1+\frac{\tau}{T}\right)\cdot\cos 2\pi f\tau\,d\tau+\int_{-\infty}^{-T}0\cdot\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

$$=2\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\cdot\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

$$=2\int_0^T\cos 2\pi f\tau\,d\tau-\frac{2}{T}\int_0^T\tau\cos 2\pi f\tau\,d\tau=\frac{1}{\pi f}\sin 2\pi fT-\frac{2}{T}\int_0^T\tau\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

上式の第 2 項は部分積分（**付録 A2.2**）をして整理すると

$$S_x(f)=\frac{1}{\pi f}\sin 2\pi fT-\frac{1}{\pi f}\sin 2\pi fT-\frac{1}{2\pi^2f^2T}(\cos 2\pi fT-1)$$

また，余弦の倍角の公式（**付録 A2.1−2**）から正弦関数で書き直すと，パワースペクトル密度は

$$S_x(f)=\frac{-1}{2\pi^2f^2T}\{1-2\sin^2(\pi fT)-1\}=T\left\{\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right\}^2$$

となる．

(3) 自己相関関数

$R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$ ----------（**表 6.2 の（3）のグラフ**参照）

この関数も，偶関数である．

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}\cos 2\pi f\tau\,d\tau=2\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

ここで

$$B=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

とおいて，部分積分を繰り返すと次式を得る．

$$B=\frac{\alpha}{(2\pi f)^2}-\frac{\alpha^2}{(2\pi f)^2}B$$

よって B について解くと

$$B=\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$$

となる．パワースペクトル密度は $2B$ となるため，次のように求まる．

$$S_x(f)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$$

6.5

振動周期が $T=0.1$ (s) なので，振動の周波数は $f=1/T=10$ (Hz)となる．この値を測定する最大周波数 f_{max} とすると，サンプリング周期は**式(6.13)**から $\Delta t=\frac{1}{2f_{max}}=\frac{1}{20}=0.05$ (s)となる．

周波数分解能とデータ数の関係から，$\Delta f=\frac{f_{max}}{N/2}\leq 0.1$ なので，データ数 $N\geq\frac{20}{0.1}=200$ となる．

6.6　デジタル信号解析

式(6.17)より周波数領域のデータ列は

$$X_N(f_k)=\Delta t\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1}x_N(t_n)e^{\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)}\qquad (k=0,1,2\ \cdots\ N-1)$$

題意の時系列データは $x_N(t_1)=1, x_N(t_0)=1, x_N(t_{-1})=-1, x_N(t_{-2})=-1$ なので，$N=4$ となりサンプリング周期 $\Delta t=1$ によって，周波数領域データは**式(6.17)**から次のように書ける．

$$X_4(f_k)=1\cdot\left\{x_4(t_{-2})e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}k\cdot -2\right)}+x_4(t_{-1})e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}k\cdot -1\right)}+x_4(t_0)e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0\right)}+x_4(t_1)e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1\right)}\right\}$$

したがって，各周波数領域データは上式から，$k=0, 1, 2, 3$ とおくと

$$\left.\begin{aligned}
X_4(f_0)&=1(-1e^0-1e^0+1e^0+1e^0)=0\\
X_4(f_1)&=1\left(-1\cdot e^{j\pi}-1\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}+1e^0+1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=2-2j\\
X_4(f_2)&=1\left(-1\cdot e^{j2\pi}-1\cdot e^{j\pi}+1e^0+1\cdot e^{-j\pi}\right)=0\\
X_4(f_3)&=1\left(-1\cdot e^{j3\pi}-1\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}+1e^0+1\cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right)=2+2j
\end{aligned}\right\}$$

ここで，オイラーの公式(1.11)から，次のような値をとる．

$$e^{j\pi}=\cos\pi+j\cancel{\sin\pi}=-1,\quad e^{j\frac{\pi}{2}}=\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}+j\sin\frac{\pi}{2}=j,\quad e^{-j\frac{\pi}{2}}=\cancel{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}+j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-j$$

$$e^{j2\pi}=\cos 2\pi+j\cancel{\sin 2\pi}=1,\quad e^{j\frac{3\pi}{2}}=\cancel{\cos\frac{3\pi}{2}}+j\sin\frac{3\pi}{2}=-j,\quad e^{-j\frac{3\pi}{2}}=\cancel{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}+j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=j$$

$$e^{j3\pi}=\cos 3\pi+j\cancel{\sin 3\pi}=-1$$

したがって，各周波数領域データは，次のようになる．

$$X_4(f_0)=0,\quad X_4(f_1)=2-2j,\quad X_4(f_2)=0,\quad X_4(f_3)=2+2j$$

6.7　相互相関関数の計算問題

相互相関関数の定義式 (6.27)に題意の正弦波と余弦波を代入して演算すると，次のように求まる．

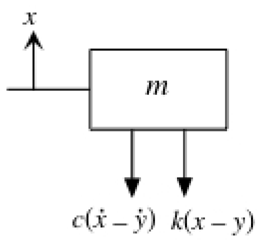
$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A\sin(2\pi ft-\theta)\cdot A\cos\{2\pi f(t+\tau)-\theta\}\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(4\pi ft+2\pi f\tau-2\theta)+\sin(-2\pi f\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left[-\frac{1}{4\pi f}\cos(4\pi ft+2\pi f\tau-2\theta)\right]_{-T/2}^{T/2}=-\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}[t\cdot\sin(2\pi f t)]_{-T/2}^{T/2}=-\frac{A^2}{2}\sin(2\pi f\tau)$$

6.8　自動車（車体）に対する励振は，路面凹凸からの受ける強制変位励振として次式で表せる．

$$y(t)=Y\sin\omega t=Y\sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right)$$



ただし，題意より$L=3$ m，$v=36$ km/$h=\frac{36\times1000}{60\times60}=10$ m/s である．

ここで，　変位振幅倍率を$M_D\le 2$とする．

自動車（車体）の上下方向の運動方程式は，自由物体線図から

$$m\ddot{x}=-c(\dot{x}-\dot{y})-k(x-y)\quad\Longrightarrow\quad m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

両辺をmで除して,整理すると

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2y$$

上式の強制振動の特殊解は，**式(2.83)**から

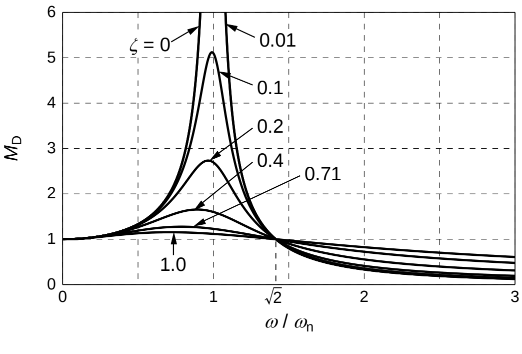
$$x_p(t)=\frac{\sqrt{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}Y}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

となり，変位の振幅倍率は，**式(6.36)**と同一となる

$$M_D=\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

上式の右辺を 2 乗して

$$I=\frac{1+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}=(M_D)^2\ \text{------}\ ①$$



変位倍率曲線

とおき，$(\omega/\omega_n)^2$ に対して I の極大値を求める．

すなわち，$\dfrac{\partial I}{\partial(\omega/\omega_n)^2}=0$　から

$$2\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-1=0 \quad \text{-------------} \quad ②$$

上式②の$\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2$に関する 2 次方程式を解の公式で解くと

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{4\zeta^2}\ (>0) \quad \text{-------------} \quad ③$$

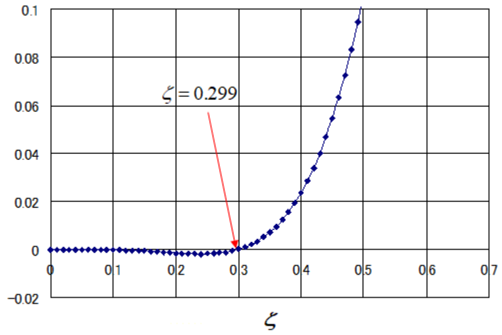
式③を式①に代入すると，最大値が求まる．

ここで，I は変位の振幅倍率 $M_D=X/Y=2$ の 2 乗になっているので，$I=4$ とおく．

$$I=\frac{8\zeta^4}{\sqrt{1+8\zeta^2}-1-4\zeta^2+8\zeta^4}=4$$

上式を変形すると，次の 4 次多項式を得る．

$$6\zeta^4-4\zeta^2-1+\sqrt{1+8\zeta^2}=0 \quad （右上図参照）$$



$f(\zeta)=6\zeta^4-4\zeta^2-1+\sqrt{1+8\zeta^2}$

上式の ζ の 4 次多項式を解析的に求めることは困難である．数値解法として，2 分法，挟み撃ち法などが適用できる．これらの数値解法によって解くと，$\zeta=0.299$ を得る．また路面から受ける励振角振動数は，$\omega=\frac{2\pi v}{L}=\frac{2\pi\times10}{3}=20.94$ (rad/s)であり，車体の固有角振動数は次のように求まる．

$$\omega_n=\frac{2\zeta\omega}{\sqrt{\sqrt{1+8\zeta^4}-1}}=\frac{2\times0.299\times20.94}{\sqrt{\sqrt{1+8\times0.299^4}-1}}=22.5 \quad \text{(rad/s)} \quad \left[f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=3.58\ \text{Hz}\right]$$

（注）普通乗用車の基本固有振動数は車種によって異なるが，通常は f_n=1.3~1.9 Hz 程度である．

6.9　例題 6.6 において，$m=300$ (kg)，$k=104$ (kN/m)，$v=80$ (km/h)，$L=6$ (m)，$Y=0.01$ (m)．

式(6.45)の加速度振幅倍率M_Aを 1.5 以下にすればよい．

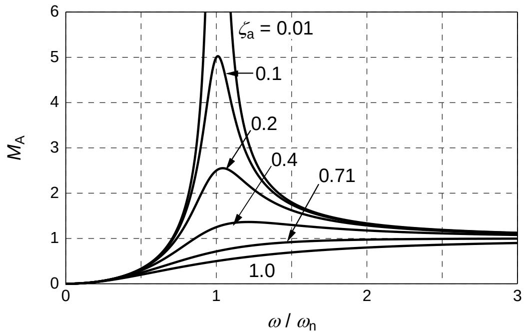
$$M_A=-\frac{\ddot{X}}{\omega_n^2Y}=\frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta_a(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

上式の右辺を 2 乗して，次のようにおく．

$$I=\frac{(\omega/\omega_n)^4}{\{1-(\omega/\omega_n)^2\}^2+\{2\zeta_a(\omega/\omega_n)\}^2}=(M_A)^2 \quad \text{----} \quad ①$$

I の極大値を $\dfrac{\partial I}{\partial(\omega/\omega_n)^2}=0$　から求めると

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\frac{1}{1-2\zeta_a^2}\ (>0) \quad \text{---------------} \quad ②$$



加速度振幅倍率曲線

のとき極大値を与える．上式②を式①に代入すると，加速度振幅倍率M_Aの 2 乗は

$$I_{max}=\frac{1}{4\zeta_a^2(1-\zeta_a^2)}=1.5^2 \qquad すなわち \quad \zeta_a^4-\zeta_a^2+\frac{1}{9}=0$$

となる，上式のζ_a^2に関する 2 次方程式を解の公式で解くと，$\zeta_a = 0.357\ (0 < \zeta_a < \frac{1}{\sqrt{2}})$を得る．

したがって，微分ゲインa（**式(6.41)**の下に与えられた式で，b =0 とする）は次のように求まる．

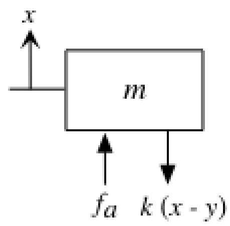
$$a = 2\zeta_a\sqrt{mk} = 2 \times 0.357\sqrt{300 \times 104 \times 10^3} = 3.988\ \ \text{(kNs/m)}$$

6.10　題意より $m = 500$ (kg)，$k = 30$ (kN/m)，$a = 2$ (kNs/m)，$b = 6$ (kN/m)，$L = 3$ (m)，$v = 36$ (km/h) $= 10$ (m/s)とする．

制御力の式:　$f_a = -a\dot{x} - bx$

自動車の上下方向の運動方程式は，自由物体線図から

$$m\ddot{x} = f_a - k(x - y)$$



上式に制御力f_aを代入して変形すると

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + (k + b)x = ky$$

ここで，路面からの強制変位は $y(t) = Y\sin\omega t$　である．

上式の両辺を m で除して変形すると

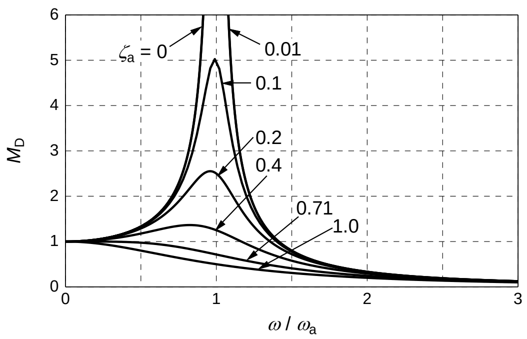
$$\ddot{x} + 2\zeta_a\omega_a\dot{x} + \omega_a^2 x = \omega_n^2 y \quad \text{--------} ①$$

ただし，

$$\zeta_a = \frac{a}{2\sqrt{m(k+b)}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k+b}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

式①の強制振動の解から，変位振幅倍率M_Dは

$$M_D = \frac{(\omega_n/\omega_a)^2}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_a)^2\}^2 + \{2\zeta_a(\omega/\omega_a)\}^2}} \quad \text{--------} ②$$



上図は式②の分子＝１とした場合の図

本問題では分子＝0.913 なので，ほぼ上図に近い

で与えられる．上式は（**式(6.42)**）と等価である．

ここで，ζ_a，ω_a，ω_nは次のように求まる．

$$\zeta_a = \frac{a}{2\sqrt{m(k+b)}} = \frac{2000}{2\sqrt{500 \times 36000}} = 0.236, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k+b}{m}} = \sqrt{\frac{36 \times 1000}{500}} = 8.485\ \text{(rad/s)},$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30 \times 1000}{500}} = 7.746\ \text{(rad/s)}$$（自動車の固有角振動数）

以上の数値から

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{7.746}{8.485} = 0.913, \ \omega = \frac{2\pi v}{L} = \frac{20\pi}{3} = 20.94\ \text{(rad/s)}$$，振動数比　$\frac{\omega}{\omega_a} = \frac{20.94}{8.485} = 2.47$

を得る．これらの値を式②に代入すると，次の値を得る．

$$M_D = \frac{(0.913)^2}{\sqrt{\{1-(2.47)^2\}^2 + \{2 \times 0.236(2.47)\}^2}} = 0.159 \cong 0.16\ [-]$$　----------- 上図参照

制御力によって，自動車の変位振幅倍率が非常に低く抑えれていることが分かる．
