

# 目次

まえがき	xiii
序文	xv
謝辞	xix
1 背景と前史	1
1.1 分割の初等的理論	1
1.1.1 分割と母関数	1
1.1.2 図形的および組合せ論的方法	6
1.1.3 ロジャーズ-ラマヌジャン恒等式のひな型	10
1.1.4 オイラーの五角数定理	11
1.1.5 オイラーの漸化公式	15
1.1.6 演習問題	16
1.2 デデキントのエータ関数とモジュラー形式	17
1.3 超幾何級数	19
1.3.1 ガウスの超幾何級数	23
1.3.2 古典的な超幾何級数の和公式	23
1.3.3 演習問題	25
1.4 超幾何和の Wilf-Zeilberger 理論	25
1.4.1 Zeilberger の生成的入子アルゴリズム	25
1.4.2 WZ 法	28
1.4.3 古典的な超幾何和公式の WZ 認証	33
1.4.4 シフト作用素	34
1.5 $q$ -類似	36
1.5.1 自然な $q$ -類似	36

1.5.2	演習問題 .....	37
1.6	$q$ -超幾何級数 .....	38
1.7	$q$ -二項定理とヤコビの三重積恒等式 .....	42
1.7.1	有限 $q$ -二項定理 .....	45
1.7.2	ヤコビの三重積恒等式とラマヌジャンのテータ関数 .....	46
1.7.3	五重積恒等式 .....	50
1.7.4	$q$ -二項級数 .....	52
1.7.5	演習問題 .....	53
1.8	$q$ -三項係数 .....	53
1.8.1	通常の三項係数 .....	53
1.8.2	幾つかの $q$ -三項係数 .....	55
1.8.3	演習問題 .....	57
1.9	$q$ -超幾何変換公式 .....	58
1.9.1	ハイネ-ロジャーズ変換 .....	58
1.9.2	ワトソンによる Whipple の定理の $q$ -類似 .....	59
1.10	2 変数および 3 変数の古典的 $q$ -級数 .....	60
1.11	2 変数の母関数 .....	63
1.11.1	$n$ の $l$ 個への分割の母関数 .....	63
1.11.2	$n$ の異なる $l$ 個への分割の母関数 .....	64
1.11.3	演習問題 .....	66
<b>2</b>	<b>黄金時代とその現代的意義</b> .....	<b>69</b>
2.1	ハーディの報告 .....	69
2.2	ロジャーズ-ラマヌジャン恒等式の二つの証明 .....	71
2.2.1	ラマヌジャンの証明 .....	71
2.2.2	ワトソンの証明 .....	73
2.3	ロジャーズ-ラマヌジャン-ペイリー機構 .....	74
2.3.1	ロジャーズ-ラマヌジャン型の恒等式の例 .....	74
2.3.2	ペイリーの変換とペイリー対 .....	76
2.3.3	一般ペイリー対とその帰結 .....	80
2.3.4	$q$ -差分方程式 .....	86

2.3.5	その他のベイリー対とラマヌジャンの 2 変数恒等式の対 .....	91
2.3.6	演習問題 .....	93
2.4	組合せ論的考察 .....	96
2.4.1	組合せ論的ロジャーズ-ラマヌジャン恒等式 .....	96
2.4.2	6 を法とする合同と関連したシュアーの分割恒等式 .....	99
2.4.3	偽りの手がかり .....	102
2.4.4	ゴールニッツ-ゴードンの恒等式 .....	104
2.4.5	ゴールニッツの分割の小恒等式 .....	108
2.4.6	ゴールニッツの分割の大恒等式 .....	109
2.4.7	演習問題 .....	113
2.5	ロジャーズ-ラマヌジャン型恒等式の近親縁者 .....	113
2.5.1	偽テータ関数 .....	113
2.5.2	擬テータ関数 .....	116
2.6	数え上げ .....	120
2.6.1	漸近公式 .....	121
2.6.1.1	分割関数 .....	122
2.6.1.2	Meinardus の定理と Todt の拡張 .....	122
2.6.1.3	ロジャーズ-ラマヌジャン-スレイター積の場合 .....	123
2.6.1.4	Meinardus の定理の応用例 .....	127
2.6.2	分割数え上げ関数を正確に与える公式 .....	130
2.6.2.1	$p(n)$ .....	130
2.6.2.2	選択制限分割関数の Rademacher 型級数 .....	133
<b>3</b>	<b>無限族 … 至る所に！</b>	<b>139</b>
3.1	ベイリー鎖 .....	139
3.1.1	ベイリーの補題の反復適用 .....	139
3.1.2	演習問題 .....	144
3.2	ロジャーズ-ラマヌジャン型恒等式の組合せ論的一般化 .....	145
3.2.1	ゴードンの定理 .....	145
3.2.2	ゴードンの定理の偶数を法とした類似 .....	148

3.2.3	奇数部分を付加された分割 .....	149
3.2.4	演習問題 .....	150
<b>4</b>	<b>無限から有限へ</b> .....	<b>151</b>
4.1	アンドリュースの $q$ -差分方程式の方法 .....	151
4.1.1	アンドリュースの “ $t$ -一般化” .....	151
4.1.2	$q$ -フィボナッチ数列とそのフェルミオン表示 .....	152
4.1.3	ボゾン形式の探索 .....	155
4.1.4	第二ロジャーズ-ラマヌジャン恒等式の マクマーン-シュアー多項式類似 .....	159
4.1.5	$q$ -三項係数を用いた有限ロジャーズ-ラマヌジャン .....	159
4.1.6	演習問題 .....	160
4.2	相反的双対 .....	160
4.3	プレスウド多項式 .....	163
4.4	8を法とした有限ラマヌジャン-スレイター恒等式 .....	172
4.5	Borwein 予想 .....	175
4.6	演習問題 .....	176
<b>5</b>	<b>動機付けられた証明, Lie 代数との関わりとさらなる恒等式</b> .....	<b>179</b>
5.1	“動機付けられた” 証明 .....	179
5.1.1	恒等式なしのロジャーズ-ラマヌジャン積 .....	179
5.1.2	Ehrenpreis の設問と経験的仮説 .....	181
5.1.3	ロジャーズ-ラマヌジャン恒等式 .....	186
5.1.4	一般化 .....	186
5.2	Lie 代数および頂点作用素代数との関わり .....	187
5.2.1	1970年代から1990年代中葉にかけて .....	187
5.2.2	予想される分割恒等式 .....	190
5.2.3	いくつかの Kac-Moody Lie 代数の標準的加群の 主指標の $q$ -積公式 .....	195
5.2.3.1	$A_n^{(1)}$ .....	195
5.2.3.2	$A_2^{(2)}$ .....	196

5.2.3.3	$C_n^{(1)}$ .....	196
5.2.3.4	$D_n^{(1)}$ .....	197
<b>6</b>	<b>だが待て…まだまだあるぞ！</b>	<b>199</b>
6.1	分割の一対一対応 .....	199
6.1.1	オイラーの分割恒等式 .....	199
6.1.2	Garsia-Milne の対合原理 .....	200
6.1.3	演習問題 .....	201
6.2	ロジャーズ-ラマヌジャンの連分数 .....	202
6.3	統計力学 .....	204
6.4	Loxton による二重対数関数の特殊値 .....	206
6.4.1	演習問題 .....	207
6.5	Hall-Littlewood 多項式 .....	208
6.6	“ $m$ -版” .....	210
6.7	結び目理論 .....	212
6.8	さらに何があるか誰が知ろう .....	213
<b>付録 A</b>		<b>215</b>
A.1	200 近いロジャーズ-ラマヌジャン型の恒等式 .....	215
A.1.0	定数の $q$ -級数展開 .....	216
A.1.1	テータ関数とその変形版の $q$ -級数展開 .....	217
A.1.2	2 を法とした恒等式 .....	217
A.1.3	3 を法とした恒等式 .....	218
A.1.4	4 を法とした恒等式 .....	219
A.1.5	5 を法とした恒等式 .....	220
A.1.6	6 を法とした恒等式 .....	222
A.1.7	7 を法とした恒等式 .....	224
A.1.8	8 を法とした恒等式 .....	224
A.1.8.1	三重積 .....	224
A.1.8.2	五重積 .....	226
A.1.9	9 を法とした恒等式 .....	226

A.1.10	10 を法とした恒等式 .....	227
A.1.10.1	三重積 .....	227
A.1.10.2	五重積 .....	227
A.1.12	12 を法とした恒等式 .....	228
A.1.12.1	三重積 .....	228
A.1.12.2	五重積 .....	229
A.1.14	14 を法とした恒等式 .....	230
A.1.14.1	三重積 .....	230
A.1.14.2	五重積 .....	230
A.1.15	15 を法とした恒等式 .....	231
A.1.16	16 を法とした恒等式 .....	231
A.1.16.1	三重積 .....	231
A.1.16.2	五重積 .....	232
A.1.18	18 を法とした恒等式 .....	233
A.1.18.1	三重積 .....	233
A.1.18.2	五重積 .....	233
A.1.20	20 を法とした恒等式 .....	234
A.1.20.1	三重積 .....	234
A.1.20.2	五重積 .....	234
A.1.24	24 を法とした恒等式 .....	235
A.1.27	ダイソンの 27 を法とした恒等式 .....	237
A.1.28	28 を法とした恒等式 .....	237
A.1.32	32 を法とした恒等式 .....	238
A.1.36	36 を法とした恒等式 .....	238
A.1.36.1	三重積 .....	238
A.1.36.2	五重積 .....	239
A.2	偽テータ級数の恒等式 .....	239
A.2.0	位数 $\frac{3}{2}$ の偽テータ級数の恒等式 .....	240
A.2.1	位数 2 の偽テータ級数の恒等式 .....	240
A.2.2	位数 $\frac{5}{2}$ の偽テータ級数の恒等式 .....	241
A.2.3	位数 3 の偽テータ級数の恒等式 .....	241

A.2.4	位数 4 の偽テータ級数の恒等式 .....	241
A.2.5	位数 5 の偽テータ級数の恒等式 .....	242
A.2.8	位数 $\frac{15}{2}$ の偽テータ級数の恒等式 .....	242
A.2.9	位数 9 の偽テータ級数の恒等式 .....	243
A.2.11	位数 $\frac{21}{2}$ の偽テータ級数の恒等式 .....	243
A.2.16	位数 16 の偽テータ級数の恒等式 .....	244
A.2.18	位数 18 の偽テータ級数の恒等式 .....	244
<b>付録 B</b>		<b>245</b>
B.1	W. N. ベイリーから F. J. ダイソンへの手紙 .....	245
B.1.1	ベイリーからダイソンへ, 1943 年 12 月 22 日 .....	245
B.1.2	ベイリーからダイソンへ, 1943 年 12 月 24 日 .....	247
B.1.3	ベイリーからダイソンへ, 1944 年 1 月 5 日 .....	248
B.1.4	ベイリーからダイソンへ, 1944 年 2 月 13 日 .....	249
B.1.5	ベイリーからダイソンへ, 1944 年 8 月 1 日 .....	252
B.1.6	ベイリーからダイソンへ, 1946 年 10 月 8 日 .....	254
B.2	F. H. ジャクソンからダイソンへの手紙, 1944 年 6 月 4 日 .....	255
B.3	L. J. ロジャーズから F. H. ジャクソンへの手紙 .....	256
B.4	W. N. ベイリーから L. J. スレイターへの手紙 .....	257
B.4.1	ベイリーからスレイターへ, 1950 年 8 月 2 日 .....	257
B.4.2	ベイリーからスレイターへ, 1950 年 9 月 5 日 .....	260
B.4.3	ベイリーからスレイターへ, 1953 年 9 月 6 日 .....	261
B.4.4	ベイリーからスレイターへ, 1953 年 12 月 11 日 .....	263
B.4.5	ベイリーからスレイターへ, 1961 年 9 月 6 日 .....	265
<b>付録 C</b>		<b>267</b>
<b>参考文献</b>		<b>269</b>
<b>訳者あとがき</b>		<b>287</b>
<b>索引</b>		<b>289</b>