物理数学講義 複素関数とその応用 近藤 慶一著

https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320036185

まえがき

本書は、物理科学を学ぶうえで最も有用かつ美しい数学の1つであり、学生にとっては必須である複素関数論(複素解析)を扱う、物理学において、実際に物理量を測定して得られる測定値は実数である。しかし、実数の物理量が従う微分方程式を解くのに、一旦、未知関数を複素数に拡張すると、微分方程式が解けるようになることが良く知られている。古典物理学では、そうやって求めた複素数の解から実部を抽出することで、元々の物理量に対する微分方程式の実数の解が求められる。

しかし、現代の物理科学で最も重要な量子物理学では、物理量といえども本質的に複素数が基本的である。実際、量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式は複素数に値を持つ波動関数に対する微分方程式であり、粒子の検出確率は複素数の波動関数の絶対値の2乗であるので実部だけでなく虚部も寄与する。シュレーディンガー方程式を実際に解くには、様々な特殊関数が必要になるが、これらは複素領域での2階線形常微分方程式の系統的な数学的取り扱いから導かれる。

本書は、複素関数と実関数との間の数学としての本質的相違が数学を専攻していない理工系学生でも理解できるように配慮して執筆したつもりである。一方で、物理学などへの応用も念頭に置いて役に立つ使える数学にすることも目指している。実際、著者は、理学部物理学科の学生に物理数学としての複素関数論を教えているが、それに引き続き次の学期で、量子力学も教えており、両者を連動させて相互関連を明確にさせながら講義できるという幸運に恵まれている。

本書の前半は、複素関数論の基礎を与える.目標は、複素関数の微分の概念 を通じて、複素関数のうち正則関数とは何かを理解すること、複素積分とは何

物理数学講義 複素関数とその応用 近藤 慶一著

https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320036185

ii まえがき

かを理解すること、複素関数における特異点の構造と複素積分における特異点の役割を理解し、複素関数の積分が極などの特異点における留数を用いて評価できること、実際に、初等的な複素積分ができること、解析接続が理解でき、リーマン面などを用いて多価関数を表現できることなどである。

後半は、複素関数論の応用を扱う、特に、複素領域での2階線形常微分方程式の解を議論する。フーリエ変換を用いて解を求める方法も紹介する。これらは、力学、電磁気学、量子力学で登場する様々な微分方程式を解くための系統的な数学的取り扱いの初歩を与える。

実際の講義では、1回の講義(90分)で 1章分を講義していた。その 15回分が 1章から 15章までに相当する。全部の項目を丁寧に説明すると時間内に収まらないので、主要な部分のみ講義し、後は学生の自習にまかせたり、レポートに課したりすればよいと考える。記述のスタイルは、一部で、数学書に見られる定義、定理、命題、補題、証明、注意という形を採用した。これは著者の好みもあるが、主張を一目瞭然にするためのものである。また、重要な主張や式を網掛けで囲んであるのも実際に講義を行うときには有効だと考え実行していた。

本書を十分に活用して、複素関数論を自分のものにし、それを基礎にして最 新の科学に取り組んでいただきたい。

2022年2月

近藤 慶一

なお、本書には紙幅の都合もあり演習問題の解答例は載せていない。一般の読者には、共立出版ホームページで以下に記載した URL から付録としてダウンロードできるようにしてある¹⁾、解答例はすべての問題ではなく、基本的で重要なものを選んでつけているが、少しづつ充実していきたいと考えている。

URL: https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320036185

物理数学講義 複素関数とその応用 近藤 慶一著

https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320036185

まえがき iii

本書について

本書では、物理学を学ぶために必要となる複素関数についての基本事項とそれの応用として複素領域での常微分方程式の解法や Fourier 変換に関する初歩的な事項を学ぶ.

目的:複素関数とその応用について学ぶ.

目標:正則関数とは何かを理解でき、留数定理を用いた初等的な複素積分ができる。解析接続が理解でき、多価関数を表現できる。複素領域での2階線形常微分方程式の解を級数解として求めることができる。Fourier 変換が理解でき計算できる。

1章-8章: 複素関数論

- 1: 複素数と複素関数、複素平面、極表示、初等複素関数
- 2: 複素関数の微分、正則関数と Cauchy-Riemann 方程式
- 3: 複素関数の積分、Cauchy 積分定理、Cauchy 積分公式
- 4: 複素関数のベキ級数, Taylor 展開, Laurent 展開
- 5: 複素関数の極と留数. 零点. 特異点
- 6: 留数定理による実関数の定積分
- 7: 解析接続
- 8: 多価関数. Riemann 面. 分岐切断. 分岐点

9 章-15 章: 複素関数論の応用

- 9: 複素領域での2階線形常微分方程式の級数解、Wronskian
- 10: 特異点のまわりの級数解。確定特異点と不確定特異点
- 11: 特性方程式、特性指数と Frobenius の方法
- 12: Fuchs 型方程式、超幾何微分方程式と超幾何級数
- 13: 合流型関数
- 14: 超幾何関数の積分表示と多価関数
- 15: Fourier 変換と微分方程式

期末試験(期末レポート)