演習問題解答　（３．現代制御）

1.1　たとえばエアコンなど，入力信号：温度・湿度，出力信号：送風温度，風速，風向

1.2　フィードフォワード制御の例：自動販売機，シーケンス制御（あらかじめ定められた順序に従って，制御の各段階を逐次進めていく制御）など
フィードバック制御の例：エアコン，炊飯器など

1.3　入力信号に対する出力信号の応答性が十分速い動的システムであれば，それを静的システムとして近似できる．ただし，応答性の速さは相対的なものであり，システム中に応答の遅いシステムと速いシステムが混在する場合，動特性が遅いシステムに対して，十分に速いシステムが存在する場合は，システム全体の性能は遅い応答システムの方に支配されるため，応答が速い方のシステムを静特性で近似しても問題は生じない場合が多い．

1.4　現代制御では制御対象のモデルが正しく得られれば，最適なコントローラの設計が可能となる．また，多入力多出力系にも対応でき，オブザーバ等の設計ツールも利用できる．ただし，作成したモデルが対象をうまく近似できていない場合は良好な制御ができない場合があり得る．一方，現代制御は古典制御に比べ，コントローラが複雑化しやすい．また，古典制御は経験則もしくは試行錯誤によりコントローラを設計できるため，システムのモデル化は必ずしも必要ではない．

2.1　電気子回路の起電力のつりあい

$$e = L_a \dot{i} L + R_a i + K_e \dot{\theta}$$

発生トルクと消費トルクのつりあい

$$K_t i = J\ddot{\theta} + D\dot{\theta}$$

状態変数として $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}$，入力を $u = e$，出力を $y = \theta$ とすると，状態方程式と出力方程式は次のように得られる．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

2.2　水位と水槽への流入出の関係より，

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dx_1}{dt} = u - q_1 \\ A_2 \dfrac{dx_2}{dt} = q_1 - q_2 \end{cases}$$

上式に，$q_1 = r_1\sqrt{x_1}$, $q_2 = r_2\sqrt{x_2}$ を代入して整理すれば，式 (2.16)，(2.17) は，以下のように書ける．

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u - r_1\sqrt{x_1}}{A_1} \\ \dfrac{r_1\sqrt{x_1} - r_2\sqrt{x_2}}{A_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

上式より，平衡状態を x_{10}, x_{20} として，式 (2.20) を計算すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=x_{10},x_{20},u=u_0} = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_1}{2A_1\sqrt{x_{10}}} & 0 \\ \dfrac{r_1}{2A_2\sqrt{x_{10}}} & \dfrac{r_2}{2A_2\sqrt{x_{20}}} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{x}=x_{10},x_{20},u=u_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{C} &= \left.\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=x_{10},x_{20}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，線形化された状態方程式は，以下のように得られる．

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_1}{2A_1\sqrt{x_{10}}} & 0 \\ \dfrac{r_1}{2A_2\sqrt{x_{10}}} & \dfrac{r_2}{2A_2\sqrt{x_{20}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ただし，$\Delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$, Δy をそれぞれ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, y と置き直した．

2.3 ピンおよび振り子の重心の座標は $(x,0)$, $(x + l\sin\theta, l\cos\theta)$ なので，これらの速度は $(\dot{x},0)$, $(\dot{x} + \dot{\theta}l\cos\theta, -l\dot{\theta}\sin\theta)$．振り子の重心まわりの慣性モーメントは $J = (1/3)ml^2$ なので，回転の運動エネルギーは，$J\dot{\theta}^2/2 = ml^2\dot{\theta}^2/6$．一方，並進の運動エネルギーは，$\left\{(\dot{x} + \dot{\theta}l\cos\theta)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta)^2\right\}m/2$．よって全体の運動エネルギーは，

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{(\dot{x} + \dot{\theta}l\cos\theta)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

また，ポテンシャルエネルギーは振り子に作用する重力に関するものだけなので，

$$U = mgl\cos\theta$$

である．よって，

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

また，損失エネルギー関数は，

$$D = \frac{1}{2}d_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}d_m\dot{x}^2$$

となる．また，外力は $f_1 = 0,\ f_2 = u$ である．一般化座標は $q_1 = \theta,\ q_2 = x$．したがって，ラグランジュ方程式は次式となる．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}} = u \end{cases}$$

よって，以下の連立微分方程式が得られる．

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta + d_m\dot{\theta} = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + d_m\dot{x}) = u \end{cases}$$

上式を $\sin\theta \cong \theta, \cos\theta \cong 1,\ \dot{\theta}^2\theta \cong 0$ として線形化すれば,

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta + d_m\dot{\theta} = 0 \\ (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\theta) + d_m\dot{x}) = u \end{cases}$$

ここで，$x_1 = \theta,\ x_2 = x,\ x_3 = \dot{\theta},\ x_4 = \dot{x}$ とおいて整理すると，以下の状態方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ {}_4 & 0 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

ただし,

$$a_1 = \frac{3(M+m)g}{(4M+m)l},\ a_2 = -\frac{3(M+m)d_m}{(4M+m)ml^2},\ a_3 = \frac{3d_x}{(4M+m)l}$$
$$a_4 = -\frac{3mg}{4M+m},\ a_5 = \frac{3d_m}{(4M+m)l},\ a_6 = -\frac{4d_x}{4M+m}$$
$$b_1 = -\frac{3}{(4M+m)l},\ b_2 = -\frac{4}{4M+m^2}$$

3.1

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

よって，$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

式 (3.1) より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t} \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

よって，$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ より，$y = \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}$

3.2 $\boldsymbol{A}$ の特性方程式は,

$$
|\, s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \,| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} = s^2-2s-3 = (s+1)(s-3) = 0
$$

よって固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ となり，以下の 2 つの固有ベクトルが存在する．

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1
$$

$$
\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2
$$

$\lambda_1 = -1$ について,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
x_{11}+2x_{21} &= -x_{11} \\
2x_{11}+x_{21} &= -x_{21}
\end{aligned}
$$

より，$x_{11} = -x_{21}$ となり，$x_{11} = 1$, $x_{21} = -1$ に選んで

$$
\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

$\lambda_1 = 3$ について,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
x_{12}+2x_{22} &= 3x_{12} \\
2x_{12}+x_{22} &= 3x_{22}
\end{aligned}
$$

より，$x_{12} = x_{22}$ となり，$x_{12} = x_{22} = 1$ に選んで

$$
\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

3.3 係数行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ の特性方程式は

$$|\, s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \,| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+6) + 4s = s(s+2)(s+5) = 0$$

よって固有値は $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -5$ となり，それぞれの固有値に対応する以下の 3 つの固有ベクトルが存在する．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

したがって，

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

により座標変換すれば，

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t)$$

となり，システムの解は式 (3.12) より，

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z_1(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} z_2(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} e^{-5t} z_3(0)$$

と得られ，モード分解される．

3.4 固有値は $\lambda_1 = -3 + 4i$ となり，すべての固有値の実部が負であるので，漸近安定である．また，固有ベクトルは，以下のように求まる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3+4i \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3-4i \end{bmatrix}$$

したがって，システムの解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3+4i \end{bmatrix} e^{(-3+4i)t} z_1(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3-4i \end{bmatrix} e^{(-3-4i)t} z_2(0) \\ &= \begin{bmatrix} 2r_1 e^{-3t} \cos(4t + \varphi_1) \\ 2r_2 e^{-3t} \cos(4t + \varphi_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし，$r_1 = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \varphi_1 = \tan 0^{-1} = 0$
$r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,\ \varphi_2 = \tan\left(\dfrac{4}{-3}\right)^{-1}$

3.5 状態方程式は，

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

となるので，特性方程式は，

$$|\,s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\,|=\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}=(s+1)(s+2)=0$$

よって固有値は $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$ となり，漸近安定である．

次に，リアプノフ方程式 (3.23) は，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式を解くと，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

シルベスターの判定条件により，

$$p_{11}=5/4>0,\quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}=1/4>0$$

よって $\boldsymbol{P}$ は実対称正定行列となり，やはり漸近安定である．

4.1 式 (4.47) を用いて，可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{K.1}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{K.2}$$

より，可制御性行列は，

$$\boldsymbol{U}_c=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}]=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \tag{K.3}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_c|=16\neq 0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{cd}})=2$ となることからも可制御だとわかる．

一方，式 (4.47) より，可観測性行列を計算する．

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.4}$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 7 \end{bmatrix} \tag{K.5}$$

より，可観測性行列は，

$$\boldsymbol{U}_o=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \tag{K.6}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_o|=0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{od}})=1$ となることからも不可観測だとわかる．

以上より可制御，不可観測である．

4.2 式 (4.48) を用いて，可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{K.7}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{K.8}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{K.9}$$

より，可制御性行列は,

$$\boldsymbol{U}_c = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \tag{K.10}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_c| = 105 \neq 0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{c}) = 3$ となることからも可制御だとわかる．

一方，式 (4.48) より，可観測性行列を計算する．

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{K.11}$$

$$\boldsymbol{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{K.12}$$

$$\boldsymbol{CA}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \tag{K.13}$$

より，可観測性行列は,

$$\boldsymbol{U}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \tag{K.14}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_o| = 10 \neq 0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{o}) = 3$ となることからも可観測だとわかる．

以上より可制御，可観測である．

4.3 式 (4.49) のシステムの双対システムは式 (4.30) より，

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{K.15}$$

式 (K.15) より，可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{K.16}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{K.17}$$

式 (K.16)，式 (K.17) より，可制御性行列は

$$\boldsymbol{U}_{cd} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T, & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -30 \\ 5 & 6 \end{array}\right] \tag{K.18}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_{cd}| = 162 \neq 0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{cd}) = 2$ となることからも可制御だとわかる．

一方，式 (K.15) より，可観測性行列を計算する．

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \tag{K.19}$$

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & -56 \end{bmatrix} \tag{K.20}$$

式 (K.19)，式 (K.20) より，可観測性行列は

$$\boldsymbol{U}_{od} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 38 & -56 \end{bmatrix} \tag{K.21}$$

となる．行列式 $|\boldsymbol{U}_{od}| = -184 \neq 0$ となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{od}}) = 2$ となることからも可観測だとわかる．

以上より，可制御，可観測である．

4.4 式 (4.50) のシステムの双対システムは式 (4.30) より，

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{K.22}$$

式 (K.22) より，可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{K.23}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 0 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} \tag{K.24}$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^2\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 0 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -47 \\ 4 & -10 \\ -13 & 55 \end{bmatrix} \tag{K.25}$$

式 (K.23)，式 (K.24)，式 (K.25) より，可制御性行列は

$$\boldsymbol{U}_{cd} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T, & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T, & (\boldsymbol{A}^T)^2\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 3 & -9 & 13 & -47 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & -3 & 13 & -13 & 55 \end{array}\right] \tag{K.26}$$

となる．$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{cd}}) = 3$ となることからも可制御だとわかる．

一方，式 (K.22) より，可観測性行列を計算する．

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.27}$$

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{K.28}$$

$$\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^T)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -20 & 18 & -54 \end{bmatrix} \tag{K.29}$$

式 (K.27)，式 (K.28)，式 (K.29) より，可観測性行列は

$$\boldsymbol{U}_{od} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^T)^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \\ \hline 4 & 0 & 4 \\ -20 & 18 & -54 \end{array}\right] \tag{K.30}$$

となる．$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{od}}) = 3$ となることから可観測だとわかる．

以上より，可制御，可観測である．

5.1

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} u \tag{K.31}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(sI - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{1}{LC} & s + \dfrac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \dfrac{R}{L} & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \end{aligned} \tag{K.32}$$

5.2 与式は,

$$U(s) = (s^3 + 7s^2 + 8s + 9)Y(s) \tag{K.33}$$

式 (K.33) を逆ラプラス変換すれば,

$$u = \dddot{y} + 7\ddot{y} + 8\dot{y} + 9y \tag{K.34}$$

ここで，$y = x_1$，$\dot{y} = x_2$，$\ddot{y} = x_3$ とすれば，$\dddot{y} = \dot{x_3}$ より，

$$\dot{x_3} = -7x_3 - 8x_2 - 9x_1 + u \tag{K.35}$$

と表わせる．最終的にこれを状態方程式の形で表現すると次式となる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -8 & -7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u \tag{K.36}$$

また，出力として x_1 を選ぶと出力方程式は

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{K.37}$$

5.3

$$Z(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 3}Y(s) \tag{K.38}$$

とおくと，与式は,

$$\begin{aligned} U(s) &= (2s^3 + 8s^2 + 4s + 6)\frac{1}{s^2 + 5s + 3}Y(s) \\ &= (2s^3 + 8s^2 + 4s + 6)Z(s) \end{aligned} \tag{K.39}$$

式 (K.39) を逆ラプラス変換すれば,

$$u = 2\dddot{z} + 8\ddot{z} + 4\dot{z} + 6z \tag{K.40}$$

ここで，$z = x_1$，$\dot{z} = x_2$，$\ddot{z} = x_3$ とすれば，$\dddot{z} = \dot{x}_3$ より,

$$\dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - 3x_1 + \frac{1}{2}u \tag{K.41}$$

と表わせる．最終的にこれを状態方程式の形で表現すると次式となる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u \tag{K.42}$$

また，$Y(s) = (s^2 + 5s + 3)Z(s)$ を逆ラプラス変換すれば，以下のように出力方程式が得られる．

$$y = \ddot{z} + 5\dot{z} + 3z = x_3 + 5x_2 + 3x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{K.43}$$

5.4 $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ より,

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-5 & 3 \\ -8 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{K.44}$$

$$= \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & -3 \\ 8 & s-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{K.45}$$

$$= \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} 2s-14 & -3s+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{K.46}$$

$$= \frac{-6(s+1)}{(s-1)(s+1)} \tag{K.47}$$

$$= -\frac{6}{s-1} \tag{K.48}$$

伝達関数を計算すると $s = -1$ で極 - 零点消去が起こっている．

6.1 式 (6.4) より,

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{K.49}$$

式 (K.49) より, 状態変数変換後のシステムは,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t) + \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) \end{cases} \tag{K.50}$$

式 (K.50) より，可制御性行列を計算する．

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{K.51}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -20 \end{bmatrix} \tag{K.52}$$

式 (K.51)，式 (K.52) より，可制御性行列は

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_c = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{B}}, & \widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 17 \\ -2 & -20 \end{array}\right] \tag{K.53}$$

となる．次に $\widetilde{\boldsymbol{U}}_c$ のランクを調べると，

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.54}$$

となり，$\mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{c}}) = 2$ となる. また，行列式 $|\widetilde{\boldsymbol{U}}_c| = -26 \neq 0$ となることからも可制御だとわかる.

式 (K.50) より，可観測性行列を計算する．

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{K.55}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{K.56}$$

式 (K.55)，式 (K.56) より，可観測性行列は

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_o = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{C}} \\ \widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ \hline 7 & 5 \end{array}\right] \tag{K.57}$$

となる．次に $\widetilde{\boldsymbol{U}}_o$ のランクを調べると，

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.58}$$

式 (K.58) となり，$\mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{o}}) = 2$ となる. また，行列式 $|\widetilde{\boldsymbol{U}}_o| = 1 \neq 0$ となることからも可観測だとわかる.

式 (6.77) より，もとのシステムの可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{K.59}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \end{bmatrix} \tag{K.60}$$

式 (K.59)，式 (K.60) より，可制御性行列は

$$\boldsymbol{U}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -3 \\ 3 & 17 \end{array}\right] \tag{K.61}$$

となる．次に $\boldsymbol{U}_c$ のランクを調べると，

$$\boldsymbol{U}_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.62}$$

式 (K.62) となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{c}}) = 2$ となる. また，行列式 $|\boldsymbol{U}_c| = 26 \neq 0$ となることからも可制御だとわかる.

式 (6.77) より，もとのシステムの可観測性行列を計算する．

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.63}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \tag{K.64}$$

式 (K.63)，式 (K.64) より，可観測性行列は

$$\boldsymbol{U}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \tag{K.65}$$

となる．次に $\boldsymbol{U}_o$ のランクを調べると，

$$\boldsymbol{U}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.66}$$

式 (K.66) となり，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{o}) = 2$ となる. また，行列式 $|\boldsymbol{U}_o| = -1 \neq 0$ となることからも可観測だとわかる.

以上より，$\mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{U}}_\mathrm{c}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{c})$，$\mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{U}}_\mathrm{o}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{U}_\mathrm{o})$ となり，状態変数変換前後で可制御性，可観測性は変化しない.

6.2 与式より，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.67}$$

まず，固有ベクトルを求める.

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} s-3 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = (s-2)(s+1) = 0 \tag{K.68}$$

より，固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

- $\lambda_1 = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ より，

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \tag{K.69}$$

$$\begin{bmatrix} 3v_{11} + 4v_{21} \\ -v_{11} - 2v_{21} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{K.70}$$

$$\begin{bmatrix} 4v_{11} + 4v_{21} \\ -v_{11} - v_{21} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{K.71}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{K.72}$$

- $\lambda_2 = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$ より，

$$\begin{bmatrix} 3v_{12} + 4v_{22} \\ -1v_{12} - 2v_{22} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{K.73}$$

$$\begin{bmatrix} v_{12} + 4v_{22} \\ -1v_{12} - 4v_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{K.74}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{K.75}$$

固有値は，$\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 2$ であり，それぞれに対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = [1 \ \ -1]^T$ と $\boldsymbol{v}_2 = [-4 \ 1]^T$ である．従って，対角変換行列は

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{K.76}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{K.77}$$

となる．対角正準形式 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$，$\widetilde{\boldsymbol{B}}$，$\widetilde{\boldsymbol{C}}$ を計算すると次のようになる．

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{K.78}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{K.79}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{K.80}$$

したがって，次の対角正準システムを得る．

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \tag{K.81}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) \tag{K.82}$$

6.3 まず，可制御性行列を計算する．

$$\boldsymbol{U}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$$

この行列式は -81 であり，システムは可制御である．

次に，可制御正準形式を求めるための変換行列 $\boldsymbol{T}$ を求めると，

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} s-5 & 2 \\ 8 & s-2 \end{vmatrix} \tag{K.83}$$

$$= s^2 \underbrace{-7}_{a_2} s \underbrace{-6}_{a_1} \tag{K.84}$$

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}] \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{K.85}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{K.86}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 39 & -3 \end{bmatrix} \tag{K.87}$$

また，その逆行列は

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -13 & 4 \end{bmatrix} \tag{K.88}$$

$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}$ を計算すると，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \tag{K.89}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -13 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -13 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -13 & 4 \\ -97 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 39 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \tag{K.90}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -13 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{K.91}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 39 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -3 \end{bmatrix} \tag{K.92}$$

と求められるので，与式のシステムの可制御正準システムは，以下のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{K.93}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -15 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) \tag{K.94}$$

式 (6.65) と比較すると，可制御正準システムとなっていることが確認できる．

7.1 ① 可制御性行列の行列式を計算すると

$$|\boldsymbol{U}_c| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \tag{K.95}$$

となるので制御対象は可制御である．

② フィードバック係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ は 2 次元の行ベクトルである．

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2 \end{bmatrix} \tag{K.96}$$

これより，閉ループ系のシステム行列 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bf}$ は

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1, & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 - f_1 & -7 - f_2 \end{bmatrix} \tag{K.97}$$

のように計算される．

③ 閉ループ特性多項式は次のようになる．

$$\begin{aligned} |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{bf}| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 + f_1 & s + 7 + f_2 \end{vmatrix} \\ &= s(s + 7 + f_2) + (10 + f_1) \\ &= s^2 + (7 + f_2)s + (10 + f_1) \end{aligned} \tag{K.98}$$

④ 一方，固有値を $-3, -6$ とする特性多項式は次式である．

$$(s+3)(s+6) = s^2 + 9s + 18 \tag{K.99}$$

⑤ 式 (K.98) が恒等的に式 (K.99) と等しくなるためには，s のそれぞれの次数の係数どうしが等しくなくてはならない．これにより，f_1, f_2 を求めるために 2 本の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} 7 + f_2 = 9 \\ 10 + f_1 = 18 \end{cases} \tag{K.100}$$

⑥ 連立方程式を解いてフィードバック係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ を求める．

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix} \tag{K.101}$$

を得る．

7.2 ① 可制御性行列の行列式を計算すると

$$|\boldsymbol{U}_c| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \tag{K.102}$$

となるので制御対象は可制御である．

② フィードバック係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ は 2 次元の行ベクトルである．

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & f_3 \end{bmatrix} \tag{K.103}$$

これより，閉ループ系のシステム行列 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bf}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{bf} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & f_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2-f_1 & 4-f_2 & 1-f_3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{K.104}$$

のように計算される．

③ 閉ループ特性多項式は次のようになる．

$$\begin{aligned} |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bf}| &= \begin{vmatrix} s+2+f_1 & -4+f_2 & -1+f_3 \\ 1 & s+5 & 0 \\ -1 & 0 & s-2 \end{vmatrix} \\ &= s^3+(5+f_1)s^2+(-1+3f_1-f_2+f_3)s \\ &\quad +(-33-10f_1+2f_2+5f_3) \end{aligned} \tag{K.105}$$

④ 一方，固有値を -4(3 重極) とする特性多項式は次式である．

$$(s+4)^3 = s^3+12s^2+48s+64 \tag{K.106}$$

⑤ 式 (K.105) が恒等的に式 (K.106) と等しくなるためには，s のそれぞれの次数の係数どうしが等しくなくてはならない．これにより，f_1, f_2, f_3 を求めるために次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} 5+f_1 = 12 \\ -1+3f_1-f_2+f_3 = 48 \\ -33-10f_1+2f_2+5f_3 = 64 \end{cases}$$

⑥ 連立方程式を解いてフィードバック係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ を求める．

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \frac{27}{7} & \frac{223}{7} \end{bmatrix} \tag{K.107}$$

を得る．

7.3 ① 可制御性行列の行列式を計算すると

$$|\boldsymbol{U}_c| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \tag{K.108}$$

となるので制御対象は不可制御である．よって，フィードバック係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ を求めることは出来ない．

8.1 まずハミルトン行列の固有値，固有ベクトルを求めよう．

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 1 & s+1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & s & -1 \\ 0 & 6 & 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}) &= s\det\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 1 & s-1 \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & s & -1 \\ 0 & 1 & s-1 \end{bmatrix} \\ &= (s^2-4)(s^2-1)=0\end{aligned}$$

したがって固有値は，$s=\pm 1,\ \pm 2$ である．固有値 $s_1=-1$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_1=[\phi_{11},\phi_{12},\phi_{13},\phi_{14}]^T$ とすれば，$(s_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{\phi}_1=\boldsymbol{0}$ より，

$$\begin{aligned}&-\phi_{11}-\phi_{12}=0,\ \phi_{11}+\phi_{14}=0, \\ &3\phi_{11}-\phi_{13}-\phi_{14}-0,\ 6\phi_{12}+\phi_{13}-2\phi_{14}=0\end{aligned}$$

ここで $\phi_{11}=1$ と選択すれば，

$$\boldsymbol{\phi}_1=[\boldsymbol{v}_1^T,\boldsymbol{u}_1^T]^T=[1,-1,4,-1]^T$$

となる．他方，固有値 $s_2=-2$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_2=[\phi_{21},\phi_{22},\phi_{23},\phi_{24}]^T$ とすれば，$(s_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{\phi}_2=\boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{\phi}_2=[\boldsymbol{v}_2^T,\boldsymbol{u}_2]^T=[1,-2,3,-3]^T$ となる．よって，リカッチ方程式の解 $\boldsymbol{P}$ は，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．

8.2 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ の可制御性，$(\boldsymbol{Q}^{1/2},\boldsymbol{A})$ の可観測性から考える．可制御性行列は $\boldsymbol{U}_c=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ となり，そのランクは 2 である．また $\boldsymbol{Q}^{1/2}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ より，行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{1/2} \\ \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$ のランクは 2 である．以上から $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ の可制御性および $(\boldsymbol{Q}^{1/2},\boldsymbol{A})$ の可観測性が分かる．

一方，問題 8.1 より，リカッチ方程式 (8.5) の解 $\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ である．この $\boldsymbol{P}$ を用いることで最適レギュレータは

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=-[0,1]\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=-[1,2]\boldsymbol{x}$$

と得られる．

8.3 まず，このシステムの一巡伝達関数 $G_o(s)$ を求める．

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, \quad \det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s(s+1), \quad \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

よって

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

これより

$$G_o(s) = k(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}b = [1,1]\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

この伝達関数のベクトル軌跡を描けば，図 K.1 のようになり，中心 $-1+j0$ の単位円内には入らないことが分かる．これより円条件が満たされていることが分かる．

8.4 システムに最適レギュレータを施した場合，閉ループ系は安定であるため，ナイキストの安定判別法より，一巡伝達関数 G_o のナイキスト軌跡が点 $-1+j0$ のまわりを反時計方向にまわる回数 N は，G_o の不安定極の個数 O と等しい．他方，円条件より，G_o のナイキスト軌跡は $-1+j0$ を中心とした単位円 C 内には入らない．このため，ナイキスト軌跡が点 $-1+j0$ のまわりを反時計方向にまわる回数 N は，この円 C 内の実軸上の任意の点 $-\frac{1}{\alpha}+j0$ を反時計方向にまわる回数と等しい．ただし，$\alpha > \frac{1}{2}$ である．これは，一巡伝達関数を α 倍した αG_o のナイキスト軌跡が点 $-1+j0$ を反時計方向にまわる回数 N_α に等しいことに注意されたい．さらに，G_o の不安定極の個数 O は G_o を α 倍した αG_o の不安定極の個数 O_α にも等しい．したがって $\alpha > \frac{1}{2}$ ならば，一巡伝達関数 G_o を α 倍しても安定性を損なうことはない．ゲイン余裕とは，一巡伝達関数 G_o のゲインをあと何倍すると安定でなくなるかを表す指標であった．このためゲイン余裕が $\frac{1}{2}$〜∞ となることがわかる．

他方，ベクトル軌跡上で，ゲイン余裕，位相余裕はぞれぞれ図 K.2 のようになる．$-1+j0$ を中心とした単位円と，原点を中心とした単位円の交点 c_1、c_2（図 K.3）と実軸がなす角がそれぞれ $\pm 60^\circ$ であることから，位相余裕が少なくとも $\pm 60^\circ$ であることがわかる．

9.1 可観測性行列は，

$$\boldsymbol{U}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_o = 2$ なので，システムは可制御である．行列 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC}$ の特性方程式は $\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})] = s^2 + (g_1+3)s + g_1 + g_2 + 2 = 0$ となる．これと (9.30) に $s_1, s_2 = -6 \pm 5i$ を代入した多項式 $s^2+12s+61=0$ の係数比較をすれば，$g_1 = 9$，$g_2 = 50$ となる．よって (9.6) より，同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -59 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 9 \\ 50 \end{bmatrix}y$$

となる．

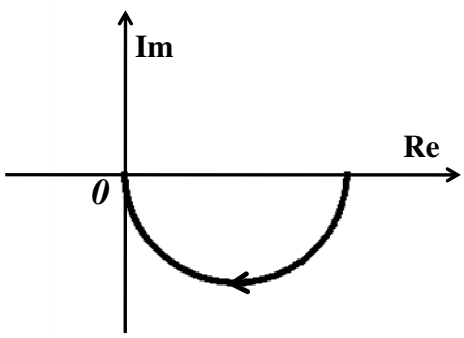

図 K.1　ベクトル軌跡

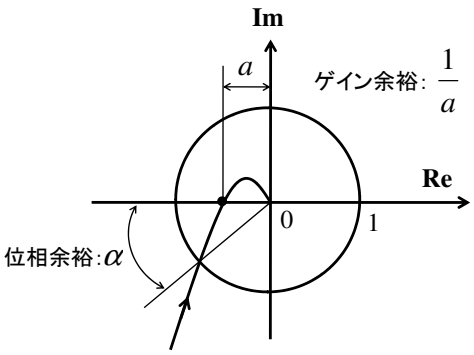

図 K.2　ゲイン余裕と位相余裕

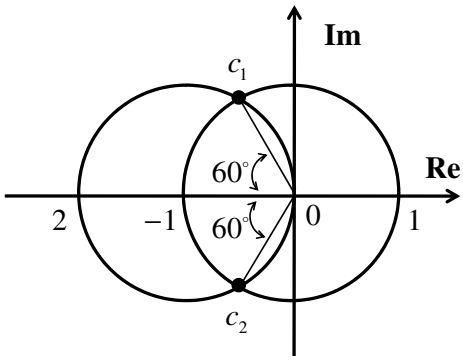

図 K.3　原点が中心の単位円と $-1+j0$ が原点の単位円

9.2　表 9.3 に従い，最小次元オブザーバを構成する．まず可観測性行列は $\boldsymbol{U}_o$ は

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

となるので，システムは可観測である．次に行列 $\boldsymbol{T}$ の一例として

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える．

$$\boldsymbol{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{TB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より，

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = [1,\ 0], \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る．$\boldsymbol{G} = [g_1,\ g_2]^T$ とすれば，行列 $A_{22} - \boldsymbol{G}A_{12}$ の特性方程式は

$$\det[s\boldsymbol{I} - (A_{22} - \boldsymbol{G}A_{12})] = s^2 + (g_1+2)s + g_1 - g_2 = 0$$

となる．これと (9.30) に $s_1 = -3$，$s_2 = -4$ を代入した多項式を係数比較することで，行列 $A_{22} - \boldsymbol{G}A_{12}$ の固有値を $s = -3$，-4 に指定するオブザーバゲイン $\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{G} = [5,\ -7]^T$ となる．最後に (9.25), (9.26) より

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{z}} + \begin{bmatrix} 13 \\ 37 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}} + \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} y$$

となる．

9.3　対象の可制御性行列および可観測性行列のランクは，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_c = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_o = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

なので，対象は可制御可観測である．次にフィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ を求める．有本・ポッターの方法で，リカッチ方程式 (8.5) を解く．ハミルトン行列の特性方程式は

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}) = (s^2-4)(s^2-1) = 0$$

これより $\boldsymbol{H}$ の固有値は，$s = \pm 2$，± 1 となる．ここで実部が負となる固有値 $s_1 = -2$，$s_2 = -1$ の固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を取れば，リカッチ方程式の解は

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2][\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

となる．よって式 (8.4) より状態フィードバックゲインは $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = [3,3]$ と得られる．なお行列 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$ の固有値は

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})] = (s+2)(s+1) = 0$$

より，$s = -1$、-2 となる．

次にオブザーバゲイン $\boldsymbol{G} = [g_1, g_2]^T$ を定める．状態フィードバックゲインの固有値よりも，複素平面上の左側に固有値がくるように，オブザーバの固有値は $s = -5$，-6 となるようにする．オブザーバの固有値は，$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})] = s^2 + g_1 s + g_2 - 1 = 0$ の根である．他方 (9.30) より，根 $s = -5$，-6 をもつ多項式は $s^2 + 11s + 30 = 0$ なので，この 2 つの多項式を係数比較することで，$\boldsymbol{G} = [11, 31]^T$ となる．よって (9.6) より，同一次元オブザーバを用いた状態フィードバックは

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -30 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 11 \\ 31 \end{bmatrix} y \\ \boldsymbol{u} &= -[3,3]\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

となる．

9.4 8.2 節で述べたように，最適レギュレータを施した場合，評価関数 (8.2) の最小値は $J_{min} = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$ となる．他方 8.5.3 節より，評価関数 J は

$$J = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^\infty (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R} (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \mathrm{d}t$$

と変形できる．ここで $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ および $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$ を代入すれば

$$J = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^\infty (\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e})^T \boldsymbol{R} (\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}) \mathrm{d}t$$

となる（J は $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$ を施した場合の評価関数の値である）．よって

$$J - J_{min} = \int_0^\infty (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R} (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \mathrm{d}t$$

となる．これは $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ を用いることで $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ のときと比べて $J - J_{min}$ ほど評価関数の値が増加していることを意味する，すなわち性能が劣化することがわかる．

10.1 ステップ状の目標値と制御量との差 $e(t)$ を考える．

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{K.109}$$

前置補償器として積分器を有しない構造なので，操作量は

$$u(t) = -Fx(t) + Ke(t) \tag{K.110}$$

となる．式 (K.110) を式 (10.85) に代入すると閉ループ系は

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\{-Fx(t) + Ke(t)\} \\
&= Ax(t) - BFx(t) + BKr(t) - BKCx(t) \\
&= (A - BF - BKC)x(t) + BKr(t) \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} x(t) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} Kr(t) \\
&= \begin{bmatrix} -2-K & 0 \\ -3-2K & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} Kr(t)
\end{aligned} \tag{K.111}$$

となる．ここで，K は閉ループ系を漸近安定にするように選ぶ．目標値 $r(t)$ がステップ状に変化するとき，$\dot{x}(\infty) = 0$ より $x(t)$ の定常値は次式となる．

$$x(\infty) = -\begin{bmatrix} -2-K & 0 \\ -3-2K & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} Kr_0 = \frac{K}{2+K} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r_0 \tag{K.112}$$

ただし，r_0 は目標値の定常値とする．よって，制御量 y の定常値は

$$y(\infty) = Cx(\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{K}{2+K} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r_0 = \frac{K}{2+K} r_0 \tag{K.113}$$

となる．上式より，K の値が十分に大きい場合には制御量は目標値にほぼ一致する．K の値が十分に大きくない場合には制御量は目標値に追従できずに定常偏差が残る．

10.2 <u>Step 1：拡大系を構成する</u> 拡大系は

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{K.114}$$

となる．ただし，

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{K.115}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{K.116}$$

とする．

<u>Step 2：拡大系の可制御性を確認をする．</u>

$$\bar{U}_c = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{K.117}$$

$$\tag{K.118}$$

であるから，$|\bar{U}_c| = 1 \neq 0$ より可制御であると判断される．

Step 3：アッカーマン法によって制御定数を求める．

閉ループ系の固有値を -2，$-1 \pm j$ に指定されたので，特性多項式 $P(s)$ は次式となる．

$$P(s) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \tag{K.119}$$

よって，

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \bar{A}^3 + 4\bar{A}^2 + 6\bar{A} + 4 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{K.120}$$

また，可制御性行列の逆行列は

$$\bar{U}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{K.121}$$

であるため，フィードバック係数は次式となる．

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{U}_c^{-1} P(\bar{A}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{K.122}$$

Step 4：$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & -K \end{bmatrix}$ から $u(t) = -Fx(t) + Kz(t)$ の F と K を求める．

式 (K.122) より

$$F = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}, K = 4 \tag{K.123}$$

となる．制御則は

$$u(t) = -Fx(t) + Kz(t) = -\begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} x(t) + 4\int_0^t e(t)dt \tag{K.124}$$

である．

10.3 閉ループ系は次式となる，

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \left(\bar{A} - \bar{B}\bar{F}\right)\bar{x}(t) + \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \end{bmatrix} \right\} \bar{x} + \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{K.125}$$

よって，

$$\begin{aligned} \left|sI - \bar{A} + \bar{B}\bar{F}\right| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 6 & s+4 & -4 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \end{aligned} \tag{K.126}$$

であるから，問題 10.3 のに一致し，閉ループ系の固有値を指定の位置に配置できたことを確認した．

10.4 目標値と外乱がステップ状に変化するとき，$\dot{x}(\infty)=0$，$\dot{z}(\infty)=0$ より $x(t)$ と $z(t)$ の定常値は次式となる．

$$\begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ z(\infty) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ -v_{10} \\ -v_{10}-\frac{1}{4}v_{20}+\frac{3}{2}r_0 \end{bmatrix} \tag{K.127}$$

制御量の定常値は

$$y(\infty) = Cx(\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ -v_{10} \end{bmatrix} = r_0 \tag{K.128}$$

で表すことができる．式 (K.128) からステップ状の外乱により制御量はステップ状の目標値に定常偏差なく追従できることを確認できる．また，積分器の出力はステップ状の目標値変化と外乱に対して

$$z(\infty) = -v_{10} - \frac{1}{4}v_{20} + \frac{3}{2}r_0 \tag{K.129}$$

の定常値となる．

10.5 伝達関数を求める．

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI-A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-s+5}{s^2-2s-1} \end{aligned} \tag{K.130}$$

$-s+5=0$ から，零点は 5 である．次に $M(s)$ を計算する．

$$\begin{aligned} M(s) &= \begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ -1 & s-2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{K.131}$$

となるから，$|M(s)|=0$ より

$$|M(s)| = \begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ -1 & s-2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = s-5=0 \tag{K.132}$$

となる．したがって，零点は $|M(s)|=0$ と一致する．

11.1

$$x(t) = \frac{t^2}{2}$$

上式を定義に従い，z 変換する．

$$
\begin{aligned}
X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
&= \frac{T^2}{2}(1^2 \cdot z^{-1} + 2^2 \cdot z^{-2} + \cdots + i^2 \cdot z^{-i} + \cdots)
\end{aligned}
$$

上式に $2z^{-1} - z^{-2}$ を掛けて差をとる．

$$
\begin{aligned}
(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) X[z] &= \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \\
X[z] &= \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}
\end{aligned}
$$

$$
x(t) = e^{-at}
$$

上式を定義に従い，z 変換する．

$$
\begin{aligned}
X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
&= 1 + e^{-aT} \cdot z^{-1} + e^{-2aT} \cdot z^{-2} + \cdots + e^{-iaT} \cdot z^{-i} + \cdots \\
&= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}
\end{aligned}
$$

$$
x(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a}
$$

上式を定義に従い，z 変換する．

$$
\begin{aligned}
X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
&= 0 + \frac{1 - e^{-aT}}{a} \cdot z^{-1} + \frac{1 - e^{-2aT}}{a} \cdot z^{-2} + \cdots + \frac{1 - e^{-iaT}}{a} \cdot z^{-i} + \cdots \\
&= \frac{1}{a} \left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) \\
&= \frac{1}{a} \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}
\end{aligned}
$$

11.2

$$
X[z] = \frac{z^2 + 2z - 1}{(z+1)(z+2)}
$$

$X[z]/z$ をヘビサイドの方法により展開する．

$$
\frac{X[z]}{z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + 2\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+2}
$$

両辺に z を乗して各項を逆 z 変換する．

$$
x[i] = -\frac{1}{2}\delta_{i,0} + 2(-1)^i - \frac{1}{2}(-2)^i
$$

$$
X[z] = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)^2}
$$

$X[z]/z$ をヘビサイドの方法により展開する．

$$\frac{X[z]}{z} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z} + 2\frac{1}{z+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(z+2)^2} - \frac{7}{4}\frac{1}{z+2}$$

両辺に z を乗して各項を逆 z 変換する．

$$x[i] = -\frac{1}{4}\delta_{i,0} + 2(-1)^i + \frac{3}{4}i(-2)^i - \frac{7}{4}(-2)^i$$

$$X[z] = \frac{z^2+1}{z(z-3)(z-4)}$$

$X[z]/z$ をヘビサイドの方法により展開する．

$$\frac{X[z]}{z} = \frac{7}{144}\frac{1}{z} + \frac{1}{12}\frac{1}{z^2} - \frac{10}{9}\frac{1}{z-3} + \frac{17}{16}\frac{1}{z-4}$$

両辺に z を乗して各項を逆 z 変換する．

$$x[i] = \frac{7}{144}\delta_{i,0} + \frac{1}{12}\delta_{i,1} - \frac{10}{9}3^i + \frac{17}{16}4^i$$

11.3

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$zX[z] - z\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} = A_d X[z] + B_d U[z]$$

$T = 0.2[s]$ のとき

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.148 \\ -0.297 & 0.522 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.016 \\ 0.148 \end{bmatrix}$$

$T = 1.0[s]$ のとき

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.600 & 0.233 \\ -0.465 & -0.097 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.200 \\ 0.233 \end{bmatrix}$$

11.4

$$G(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

式（11.15）より 0 次ホールドは

$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

パルス伝達関数は

$$\begin{aligned} G[z] = Z[H(s)G(s)] &= \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] \\ &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] \\ &= \frac{1}{\omega}\frac{(z+1)(1-\cos\omega T)}{z^2+2\cos\omega T z+1} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(1+Ts)}$$

パルス伝達関数は

$$\begin{aligned} G[z] = Z[H(s)G(s)] &= \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(1+Ts)}\right] \\ &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s(1+Ts)}\right] \\ &= \frac{T}{z-1} - \frac{T(1-e^{-1})}{z-e^{-1}} \end{aligned}$$

11.5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

式（11.65）へ代入すると

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\omega t) & -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\omega t) \\ \frac{\sin(\sqrt{2}\omega t)}{\sqrt{2}} & \cos(\sqrt{2}\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.6

$$\boldsymbol{x}[i+1] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}[i] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u[i] \quad (i \geq 0)$$

ただし，

$$u[i] = 1 \quad (i \geq 0), \qquad \boldsymbol{x}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．

両辺を z 変換する．ただし，$\boldsymbol{x}(t)$ の z 変換を $X[z]$ とする．

$$zIX[z] - z\boldsymbol{x}[0] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}X[z] + \frac{z}{z-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{K.133}$$

$X[z]$ について解くと

$$X[z] = \begin{bmatrix} z & -2 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} z \\ z+\frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z(z^2+1)}{z(z-2)(z+1)(z-1)} \\ \frac{z(z^2+z-1)}{z(z-2)(z+1)(z-1)} \end{bmatrix}$$

となる．

ヘビサイドの方法により展開すると

$$X[z] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}\frac{z}{z-2} + \frac{1}{3}\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z-1} \\ \frac{5}{3}\frac{z}{z-2} - \frac{1}{6}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

を得る．

各項を逆 z 変換すると，$i \geq 0$ に対して求めるべき解は

$$x[i] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}2^i + \frac{1}{3}(-1)^i - 1 \\ \frac{5}{3}2^i - \frac{1}{6}(-1)^i - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

となる．