「例題でわかる　基礎･演習　流体力学」

追加演習問題と解答

（2005/10 月更新版）

1．オリフィスから流出する液体の体積流量：Q（単位時間当りの流出体積）は次式で与えられる。

$$Q = 0.61 A\sqrt{2gh}$$

ここで，A：オリフィスの断面積，g：重力加速度，h：オリフィスまでの液柱の高さを表している。この式における次元の一様性を調べよ。

解答：与式の左辺と右辺について，それぞれを構成する変数の次元を調べると以下の通りとなる。

体積流量	：	Q	=	$L^3 T^{-1}$
断面積	：	A	=	L^2
重力加速度	：	g	=	$L\ \ T^{-2}$
高さ	：	h	=	L

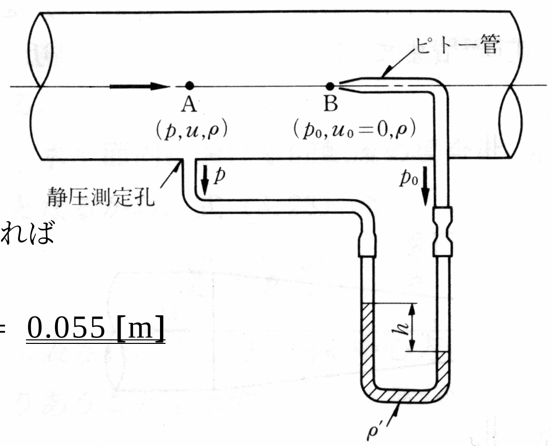
従って，右辺全体の次元は

$$\therefore\ L^2 \times \left\{ \left(LT^{-2} \right) \times L \right\}^{\frac{1}{2}} = L^2 \times LT^{-1} = L^3 T^{-1} = \text{左辺の次元}$$

以上より，与式に関する次元の一様性は証明された。

2．空気が 30m/s の速さで流れている。この流れにピトー管を挿入し，水を入れた示差マノメータに連結すれば，水柱の差はいくらになるか。

解答：右図のように物理量を設定すればベルヌーイの定理から，



$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 \qquad \cdots(1)$$

一方，マノメータにおける力の釣り合いから，

$$p + \rho' gh = p_0 + \rho gh \qquad \cdots(2)$$

式(1)および式(2)より，未知の量：h を既知の量から導出すれば

$$\therefore\quad h = \frac{u^2}{2g\left(\dfrac{\rho'}{\rho} - 1\right)} = \frac{\left(30[m/s]\right)^2}{2 \times 9.8[m/s^2]\left(\dfrac{1000[kg/m^3]}{1.2[kg/m^3]} - 1\right)} = \underline{0.055\ [\mathrm{m}]}$$

(圧縮性流体)

３．二次元斜め衝撃波において衝撃波角を β とすると，斜め衝撃波前後の密度比と圧力比を求めよ．

考えるヒント：二次元斜め衝撃波においては，衝撃波に垂直速度成分と平行な速度成分に分けて，平行速度成分は衝撃波前後で変化しない．垂直方向速度成分は Rankin-Hugoniot（ランキンーユゴニオ）の関係を使う．

解答：例題５より衝撃波前後の圧力比は

$$\frac{p_b}{p_a}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_a^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (1)$$

と表されるので，$u_a=U_a\sin\beta$ であるので $M_a\rightarrow M_a\sin\beta$ とおけば**（ここがポイント）**

$$\frac{p_b}{p_a}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_a^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (2)$$

と表すことができる．

一方，密度比は，同様に

$$\frac{\rho_a}{\rho_b}=\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}+\frac{2}{(\gamma+1)M_a^2\sin^2\beta} \qquad (3)$$

となる．

整理項目：衝撃波前後の圧力上昇は衝撃波角 β を使った $\sin\beta$ の二次関数の関係で変化する．

４．(圧縮性流体)

等エントロピー流れにおいて渦なしの流れはオイラー方程式の自明な解であることを示せ．

考えるヒント：オイラーの運動方程式を自在に変形して，圧縮性流れにおいてもその物理的意味を考えよう．

解答：オイラーの運動方程式の移流項 $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ について次の恒等式が成り立つ．$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})+\nabla(u^2/2)$．これを代入して，渦度 $\vec{\omega}(=\nabla\times\vec{u})$ を用いると

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\vec{u}\times\vec{\omega}=-\nabla\frac{u^2}{2}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nabla\Phi \qquad (1)$$

となる。ただし，一様重力加速度 g の重力場（z 軸の負の方向）$\Phi = gz$ を表す．等エントロピー変化 $ds = 0$ においては $dh = dp / \rho$ であるので，

$$\frac{1}{\rho} gradp = gradh \qquad (2)$$

が成り立つ．その結果，オイラーの運動方程式は

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -grad\left(\frac{1}{2}u^2 + h + \Phi\right) \qquad (3)$$

となる．ここで，両辺に左からナブラー ∇ を作用させ，右辺はベクトル解析の恒等式を使うと **（この関係はよく使うので，知っていると便利）**

$\nabla \times (grad\varphi) = 0$

より，(3)式は

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \qquad (4)$$

となる．したがって，$\vec{\omega} = 0$ は恒等的に上式を満たす．

整理項目： $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$ **をさらに変形すると，ベクトル解析の恒等式** $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{u}) = 0$ **に注意して**

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla \vec{\omega} = (\vec{\omega} \bullet \nabla)\vec{u} - \left(\nabla \bullet \vec{u}\right)\vec{\omega} \qquad (5)$$

と表すことができる．右辺が渦度の輸送に対するソース項またはシンク項になる．右辺第二項は衝撃波（$\nabla \bullet \vec{u} < 0$）を渦が通過するときに，同じ方向の渦度が増加する．右辺第一項は渦度を新たに作り出したり消滅させたりする非圧縮性流れにおいも重要な項である．

５．（粘性流体の流れ）

十分発達した平行平板間の定常流れが満たす基礎方程式と境界条件を与えよ。

考えるヒント：平板間で十分発達した流れとなるという意味は平衡状態に達して流れ方向に流速は変化しなくなる状態である．

解答：境界条件は平板表面で粘着条件 $u = v = w = 0$ である。

重力の影響を無視する。定常ナヴィエ・ストークス方程式

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

において，平行平板間の流れは十分発達する下流では平板に平行な流れが実現される。したがって，いたるところ $v=w=0$ となる流れが観察される。ナヴィエ・ストークス方程式より，$\dfrac{\partial p}{\partial y}=0,\dfrac{\partial p}{\partial z}=0$ と，流れ方向以外では圧力は一様である。また，連続方程式より $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ となる，速度 u はもはや x 軸方向に変化しない流れに発達している。よって

ナヴィエ・ストークス方程式の x 方向成分に着目すると，左辺はまったく寄与しないことがわかる（**ここがポイント**）。また，右辺第二項の粘性項において $\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ が圧力勾配 $\left(-\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)$ と釣り合うことがわかる。したがって，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y}=0,\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

が平行平板間の定常流れが満たす基礎方程式となる。この方程式に対する境界条件は両壁面（$y=-h, y=h$）で

$$u=0$$

である。

整理項目：線形の微分方程式になったことに注意せよ.

６.（粘性流体の流れ）

演習問題５で与えられた基礎方程式を境界条件のもとに解き，十分発達した平行平板間の定常流れを求めよ。

学習のねらい：具体的に解析的な解を求めよう.

解答：非定常流れでは平行流の基礎式は，時間変動項を残して

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y}=0,\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

となる。圧力は x,t の関数であるが，速度は y,t の関数であるので常に成立するのは圧力が t だけの関数の場合だけである（**ここがポイント**）。圧力勾配 $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)=P(t)$ とすると，定常流れにおいては一定である。したがって，基礎式を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{P}{\mu}\ (一定)$$

と書き，境界条件は（$y=-h, y=h$）で $u=0$ である。**（ヒント：積分を実行し積分定数を境界条件より決定せよ）**

基礎式を積分すると，

$$u(y)=-\frac{P}{2\mu}y^2+C_1y+C_2$$

速度分布がえられる。たたし，積分定数 C_1,C_2 は境界条件より

$$C_1=0,\quad C_2=\frac{P}{2\mu}h^2$$

がえられる。したがって，

$$u(y)=\frac{P}{2\mu}(h^2-y^2)$$

が求める答えである。

整理項目：放物線分布を示す速度分布である.

７．(完全流体の流れ)

亜音速流れ（マッハ数 $M<1$）におけるポテンシャル流れ

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

が，$\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}$ として，座標 (x,y,z) を変換して座標 (ξ,η,ζ)

$$\xi=x,\quad \eta=\beta y,\quad \zeta=\beta z$$

および，速度ポテンシャルを

$$\phi(x,y,z)=\lambda\phi'(\xi,\eta,\zeta)$$

とおけば，ラプラス方程式は

$$\frac{\partial^2\phi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial\zeta^2}=0$$

となり，非圧縮流れに帰着することを示せ。

解答：$\beta = \sqrt{1-M_\infty^2}$ とした座標変換

$\xi = x$，$\eta = \beta y$，$\zeta = \beta z$

によって，2 階微分は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

とあらわされる．したがって，ポテンシャル流れは

$$(1-M^2)\lambda \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \xi^2} + \lambda\beta^2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2} + \lambda\beta^2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \zeta^2} = 0$$

とあらわされる．$\beta = \sqrt{1-M_\infty^2}$ であるので，ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \zeta^2} = 0$$

が得られる。

８．(粘性流体の流れ)

$u = ay$，$v = 0$，$w = 0$ という速度場が与えられたとき($a =$ 正定数)，ずれ運動と回転運動とに分解せよ。また，渦度を求めよ

解答：ずれ運動と回転角速度はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \Omega_z$$

とあらわされる。したがって，

$\gamma_{xy} = a$ **であり，**$\Omega_z = -\dfrac{a}{2}$

である．渦度は回転角速度の半分で $-a$ **である．**