「例題でわかる　基礎・演習流体力学」

追加演習問題と解答

2005/10 月更新

第 3 章

［Example 1］

翼長 10m のグライダーが 20.0m/s で飛行するときの流れを調べるために，レイノルズの相似則に基づいて，翼長 1.0m の相似模型を製作して回流水槽の中で実験を行った．模型の翼近くのある点の流速が 2.0m/s であったとすると，実機の相似な点における流速は何 m/s か求めなさい. ただし, 空気と水の動粘性係数をそれぞれ 1.5×10^{-5}, $1.0\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ とする.

（考えるヒント）

相似な流れは，無次元量として同じ値を取る.

（解答）

まず，レイノルズの相似則から模型実験の代表流速 U を求める.

$$\mathrm{Re} = \frac{18.0\times10.0}{1.5\times10^{-5}} = \frac{U\times1.0}{1.0\times10^{-6}}$$

$$\therefore U = 12.0 \quad (\mathrm{m/s})$$

ふたつの流れは無次元量として同じ値を取るので，求めるべき実機での流速 V は,

$$\frac{V}{18.0} = \frac{2.0}{12.0}$$

$$\therefore V = 3.0 \quad (\mathrm{m/s})$$

と導かれる.

［Example2］

ターボ機械の相似則を与えるパラメータとしては，

$$N = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

で定義される比速度が用いられる．ここで，n は回転数（rpm），Q は体液流量（m^3/min.），H はヘッド（m）である．このパラメータは特殊であり，一般の相似則で用いられる無次元のパラメータ（例えば，レイノルズ数）とは異なって次元を持っている．いま，ある羽根車が回転数 1000（rpm），流量が 50.0（m^3/min.），ヘッド 30（m）で運転されているとする．この羽根車と幾何学的に相似な別の羽根車が回転数 1200（rpm），流量 70.0（m^3/min.）で運転されているとき，ふたつの羽根車の流れが相似となるためにはヘッドは何 m であればよいか求めなさい．

（解答）

比速度が同じであれば良いので，

$$N = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = \frac{1000 \times \sqrt{50.0}}{30.0^{3/4}} = \frac{1200 \times \sqrt{70.0}}{H^{3/4}}$$

$$\therefore H = 47.9 \quad \text{(m)}$$

が求める答である．

第 8 章

［Example 1］

壁面上に発達した 0 圧力勾配乱流境界層を考える．壁面から 1.0cm 離れた位置における時間平均流速を求めなさい．ただし，この境界層の摩擦速度を 2.0×10^{-2}m/s，動粘性係数を 1.0×10^{-6}m²/s とする．

（考えるヒント）

壁座標の値を求め，この位置が粘性底層か対数法則領域かを判別する．

（解答）

壁座標は，定義より

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} = \frac{2.0\times10^{-2}\times0.01}{1.0\times10^{-6}} = 2.0\times10^{2}$$

この y^+では対数法則が成り立つので，時間平均流速は,

$$\overline{u} = \left(2.5\ln y^+ + 5.5\right)u_\tau = \left(2.5\ln 2.0\times10^{2} + 5.5\right)\times 2.0\times10^{-2} = 0.375 \quad \text{（m/s）}$$

と求まる．

［Example 2］
主流流速が

$$U=\left(1+\frac{x}{L}\right)U_0$$

で与えられる平板上の層流境界層がある．ここで，U_0 は平板前縁における流速，L は平板の長さ，x は平板前縁から測った距離である．平板前縁の圧力が P_0 のとき，平板前縁から距離 x の位置における圧力を与える式を導きなさい．

（考えるヒント）
134 ページ Example 4 の結果を利用する．

（解答）
圧力勾配と主流流速との関係は,

$$\frac{dp}{dx}=-\rho U\frac{dU}{dx}$$

で与えられる（134 ページ Example4 参照）．この式に U の式を代入すると,

$$\frac{dp}{dx}=-\rho\left(1+\frac{x}{L}\right)U_0\frac{d\left(1+\frac{x}{L}\right)U_0}{dx}=-\rho\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{U_0^2}{L}$$

となる．したがって，位置 x における圧力を与える式は,

$$p(x)=P_0+\frac{dp}{dx}x=P_0-\rho\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{U_0^2x}{L}$$

$$\therefore\ p(x)=P_0-\rho\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{U_0^2x}{L}$$

と導かれる．

第 10 章

［Example 1］

k-ε モデルでは，渦粘性が

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad ただし，C_\mu = 0.09$$

と与えられる．このとき，乱れの速度スケール V と長さスケール L はどのように与えられるか求めなさい．

（考えるヒント）

単位を速度と長さに分けて考えてみよう．

（解答）

ν_t，k，ε の単位は，それぞれ［m^2/s］，［m^2/s^2］，［m^2/s^3］である．速度スケール V の単位は[m/s]であるので，k の 1/2 乗を用いればよい．すなわち，

$$V = \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{k}$$

渦粘性係数の単位を分解することにより，長さスケール L は,

$$\nu_t = \frac{m^2}{s} = \frac{m}{s} \times m = \sqrt{k} \times L = \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\therefore L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$$

となる．以上より，

$$V = k^{\frac{1}{2}} \quad , \quad L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$$

が求めるべき解である．

［Example 2］

速度分布が 1／7 乗法則で近似できるとき、壁からの距離が y＝0.1δおよび y＝0.5δにおける乱流渦の平均的な大きさを求めなさい。ただし、δは境界層厚である。

（考えるヒント）

混合長（0 方程式モデル）を利用して考えてみよう。

（解答）

y＝0.1δでは、

$$y < \frac{\lambda\delta}{\kappa} = \frac{0.09\,\delta}{0.41} = 0.22\,\delta$$

であるため、（10.45）式の上の式より、平均的な渦の大きさが、

$$l_m = \kappa y = 0.41 \times 0.1\delta = 0.041\,\delta$$

と求まる。

一方、y＝0.5δでは、

$$y > \frac{\lambda\delta}{\kappa} = \frac{0.09\,\delta}{0.41} = 0.22\,\delta$$

であるため、（10.45）式の下の式より、平均的な渦の大きさが、

$$l_m = \lambda\delta = 0.09\,\delta$$

と求まる。

第 11 章

［Example 1］

温度差が ΔT であるとき，単位体積の流体に作用する浮力 F が

$$F = -\rho * g\alpha\Delta T$$

と与えられることを示しなさい．ただし，ρ*は基準温度における密度，g は重力加速度，αは熱膨張率であり，流れ場の圧力は一定，温度差 ΔT は微小と仮定する．

（考えるヒント）

基準温度（例えば、主流の温度）まわりに密度のテイラー展開を考えてみよう．

（解答）

密度ρを基準密度ρ*まわりに温度 T に関してテイラー展開すると，次式となる．

$$\rho = \rho * + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\right)_p (\Delta T)^2 + \cdots$$

ここで，温度差が微小であるとの仮定より，ΔT の 2 次以上の項を省略すると，

$$\rho = \rho * + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T$$

が得られる．この式を変形すると，

$$\rho - \rho* = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T$$

となる．この密度差は単位体積に含まれる流体の質量の差であるため，これに重力加速度を乗じて重量とすれば，温度差 ΔT の単位体積の流体に作用する浮力を与えることが分かる．すなわち，

$$F = (\rho - \rho *)g = g\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T$$

ここで，熱膨張率αの定義（1.19）式を用いると，浮力を表わす式として

$$F = -\rho * g\alpha\Delta T$$

が導かれる．