

目 次

第 1 章	基本だよ，ワトスン君	1
1.1	論理的思考とは・・・	1
1.2	元だよ，ワトスン君	9
第 2 章	「足し算はできるかね？」	17
2.1	関数	17
2.2	ベクトルに対する関数	26
2.3	関係	34
2.4	数え上げと数学的帰納法	38
第 3 章	鳴鐘術と置換	47
3.1	置換	47
3.2	逆関数	54
3.3	巡換記法	61
3.4	すべての置換を列挙するアルゴリズム	68
3.5	置換と鳴鐘術	72
第 4 章	置換パズル	77
4.1	15 パズル	78
4.2	ホッケーパックパズル	80

4.3	レインボーマスターボール	81
4.4	ピラミックス	84
4.5	ルービックキューブ	87
4.6	スキューブ	94
4.7	メガミックス	97
4.8	その他の置換パズル	101

第5章 可換で紫色のもの、これなあに? 103

5.1	単位 4 元数	104
5.2	有限巡回群	105
5.3	2 面体群	106
5.4	対称群	107
5.5	群の一般的定義	109
5.6	部分群	118
5.7	パズルに現れる群の例	120
5.8	交換子	126
5.9	共役	129
5.10	軌道と作用	134
5.11	剰余類	140
5.12	鳴鐘術再訪	146
5.13	ディミーノのアルゴリズム	146

第6章 ようこそマシンへ 151

6.1	歴史的経緯	151
6.2	マーリンの機械	152
6.3	ゲームの変種	153
6.4	有限状態機械	157
6.5	有限状態機械の数理	159

第7章 「神のアルゴリズム」とグラフ 175

7.1 はじめに	175
7.2 ケーリーグラフ	178
7.3 神のアルゴリズム	182
7.4 15 パズルのグラフ	185

第8章 対称性とプラトン立体 191

8.1 五つの正多面体	191
8.2 3次元の対称変換	193
8.3 正4面体の対称変換	196
8.4 立方体の対称変換	197
8.5 正12面体の対称変換	198
8.6 正20面体の対称性についての考察	200
8.7 901083404981813616 通りの配置	203

第9章 (規則を無視した) ルービックキューブ群 205

9.1 群の準同型写像	206
9.2 群の作用	210
9.3 群の同型写像	212
9.4 核, 正規部分群およびその他の部分群	218
9.5 剰余群	222
9.6 群の直積	226
9.7 群の半直積	235
9.8 環積	238

第10章 語としての手順 245

10.1 自由群における語	246
10.2 語の問題	250

10.3 群の表示	254
10.4 位数 26 未満の群の生成元と関係	257
10.5 表示問題	264
第 11 章 (規則に従った) ルービックキューブ群	269
11.1 $3 \times 3 \times 3$ ルービックキューブの手順の数学的記述	269
11.2 ルービックキューブ群の構造	275
11.3 位数 2 の手順	281
第 12 章 平方群, 2 面群およびその他の部分群	287
12.1 平方部分群	287
12.2 有限体はわかり	291
12.3 $PGL(2, \mathbb{F}_5)$ および 2 面群	296
12.4 交叉群	304
第 13 章 ルービックキューブ系パズルの群	309
13.1 統一的な取扱い	309
13.2 スキューブの群の構造	311
13.3 $2 \times 2 \times 2$ キューブの数学的記述	315
13.4 ピラミックスの群の構造	318
13.5 スクエア 1 のホモトピー群	324
13.6 マスターボールの群	329
第 14 章 ルビコンを渡って	331
14.1 モンジェ・シャフル	331
14.2 射影特殊線形変換群 $PSL(2, \mathbb{F}_p)$	333
14.3 ガロアの最後の夢	334
14.4 M_{12} の生成	335

14.5	ゴレーイ符号	336
14.6	M_{12} はルビコン川を渡って	345
14.7	マシュー群に関するいくつかの興味深い事実	345

第 15 章 置換パズルの解法戦略 351

15.1	ルービックキューブの解法戦略	351
15.2	部分群法	355
15.3	マスターボール	359
15.4	スキューブ	362
15.5	ピラミンクス	363
15.6	メガミンクス	364

第 16 章 関連する問題およびその他の分野 367