ま　え　が　き

本書は，数理論理学の入門書である．その目的とするところは，まず第一に，いわゆる**記号論理**（symbolic logic）の大要を解説することであるが，それと同時に，読者が記号論理学における種々の手法のいくばくかを体得されることをも期待して書かれている．また，入門書としての性格を徹底させるために，これに必要な予備知識の量を極度に圧縮し，高等学校の程度をこえる数学上の知識を不要とするよう配慮はしたが，もちろん，読者にある程度の思考能力は仮定されている．しかし，一歩をゆずるとしても，大学初年級の数学を学びつつある学生にとっては理解しうる内容であると信ずる．

教育者としての著者のとぼしい経験によるものではあるが，数理論理学を学ぶ学生に共通の弱点は何かというと，それは，記号論理学の発生以来重要視されてきた数学的記号法の運用にあるのではなく，むしろ，その記号法を裏づけるところの内容，あるいは，それによって導かれた諸結果の解釈，総じて言うならば，記号論理を基礎づける思想の理解という面において多く現われ，しかも，そのような弱点は，しばしば学生をして安易なる哲学に導かしめるのである．かかる点を考慮に入れ，本書においては，記号論理の体系をあまくだりに記述してしまうというような方法はとらずに，それを読者とともに一歩一歩作り上げていくという形において叙述をすすめていくことにした．また，基本的な概念の解説に際しては，巧妙な言い回しによって困難をさけるというようなことはせずに，なるべく物事を正面から解決するという立場をとり，説明は拙劣であろうとも，たとえば〈変数を含む命題〉の解説（第Ⅱ編，§ 2）におけるがごとく，時として著者はあえて哲学者たらんとさえした．も

っとも，その解決法が至当なものであるかどうかということは，読者の判断に残された問題である．

本書が記号論理の体系の裏づけとなる思想を重視したとは言え，本書を読むのに何も哲学的予備知識を必要とするわけではない．思想の裏づけのない形式より以上に，具体的知識をともなわない哲学は，われわれの最も警戒しなければならぬところである．したがって，本書において第一に意を用いた点はといえば，それはもちろん，言うまでもないことではあるが，記号論理の構造とその形式についての解説である．そして，構造と形式を完全に理解するところから思想はおのずと生まれいずるであろうし，また思想とはそのようなものでなければならぬ．あるいは，完全な理解そのものが思想とよばれるものであるのかもしれない．

つぎに著者の考慮した点はと言えば，本書をさほどの特徴のない入門書とすることであった．著者の個性的な趣味が前面に押し出されている入門書の是非を一般的に論ずることは困難であるが，わが国におけるこの方面の著書一般の現況を考慮した場合，少なくとも今回は平凡な入門書を作るべきであると考えざるを得なかったのである．したがって，本書の構成も

第Ⅰ部　命題論理　　　第Ⅱ部　述語論理

という，まったくの因習的な分類法に従っている．ただ，そのような因習的分類法も利点がなかったわけではない．たとえば，記号論理の研究はつねにただ1種類の考え方をもとにして進められているというわけのものではなく，多様な方法があるのであるが，命題論理という構造の比較的単純な範囲を利用して，その多くの方法のうちの幾分かを紹介することが可能であった．さらには，その結果として，記号論理学の主要部分をなす述語論理の解説に当たっては，ただ一つの観点のみを基礎とすることも可能となり，そのためにかえって，述語論理に関する叙述を少

しでも統一的なものになし得たものと信じている．頁数だけを見れば，本書の大半が命題論理のために費されているが，それは述語論理の非重要性を示すものではない．それは，述語論理を重要視した結果の現われであるとさえ言いうる．第I部の命題論理についての解説はすべて第II部への準備のためのものであることを読者はご承知願いたいのである．

昭和41年5月14日

著　　者

は じ め に

(Semantics と Syntax　超数学)

数理論理学の解説を始めるに当たって，まず，その研究方法に対する一般的注意を与えておく．

数理論理学（mathematical logic）とは，数学に用いられる論理の構造を研究する数学の一部門である．したがって，そこでは〈命題〉とか〈推論〉それ自身が研究の対象となる．

さて，命題や推論そのものを研究するには，本質的に異なった二つの立場がある．その一つは semantics とよばれ，他の一つは syntax とよばれる．

Semantics：　命題や推論の**真偽や内容をもとにして**研究する立場

Syntax：　命題や推論の**真偽や内容には触れずに**，その形式上の構造にのみ着目して研究する立場

そこで，論理の研究に際しては，現在このいずれの立場に立って研究がなされているかということを，はっきりと意識しておかなければならない．さもないと，種々の誤解をまねき，無用の混乱をひき起こすことがあるからである．

Semantics は，論理を研究する方法としては，まったく常識的な立場といってよいから，これ以上の説明の必要はないであろう．問題はむしろ syntax のほうで，命題の真偽や推論の内容を考えずに論理の構造を研究する，ということが，初学者には何となく理解されにくい点を含むと思われるので，以下，射影幾何学における双対原理を例にとって，それを少しく説明してみよう．

そこでまず，平面射影幾何学に話を限って，双対原理なるものの要点を簡単に述べておく：

点と直線のみに関する**正しい**命題が与えられたとき，その命題の中の〈点〉ということばと〈直線〉ということばとを入れかえ，〈(点が直線)の上にある〉ということばと〈(直線が点）を通る〉ということばとを

入れかえてできる命題——最初に与えられた命題の**双対**——も**正しい**．これが**双対の原理**である．たとえば，

相異なる2点のいずれをも通る直線は一つあって，しかも一つに限る

という正しい命題の双対は

相異なる2直線のいずれの上にもある点は一つあって，しかも一つに限る

という正しい命題である．[1)]

双対原理の証明はつぎのように述べられる：　射影幾何学の公理の双対はすべて，ふたたび射影幾何学の公理となるか，または，射影幾何学の公理から導かれる定理である．したがって，与えられた定理の証明に現われる命題を全部その命題の双対に書きかえれば，与えられた定理の双対にいたる証明が得られる．よって，射影幾何学における定理の双対は，ふたたび射影幾何学の定理となることがわかる．

さて，上に述べた〈双対原理の証明〉において，〈点〉とか〈直線〉という名詞が何を意味しているか，〈…の上にある〉とか〈…を通る〉ということばが，点と直線とのどんな相互関係を意味しているか，ということを知っている必要があるであろうか？　というと，じつは，そのような必要は全然ないのであって，必要なのは，公理の双対がふたたび公理となるか，または公理から証明される定理である，という，まったくの形式的な事実を知っていることだけである．点とか直線の内容を知っているということは，双対原理の証明を理解するためには，じゃまにこそなれ，何の益するところもない．

射影幾何学の双対原理は，〈点〉，〈直線〉，〈…の上にある〉，〈…を通る〉などのことばの内容をまったく度外視して，ただ公理の形式のみに着目する，ということによってのみ得られる定理である．そして，このような研究方法が syntactical な（すなわち，syntax における）方法というものである．

われわれは，双対原理は一つの〈定理〉である，といった．少なくと

1）射影幾何学とは，初等幾何学の言葉を借りていえば，〈無限遠点〉や〈無限遠直線〉をも含めた幾何学である．よって，この命題は正しい．

も，われわれは双対原理を〈証明する〉ことができるのである．しかし，双対原理は射影幾何学**における**定理ではない．とにかく，射影幾何学の公理**から証明される**定理ではない．そうではなくて，双対原理は射影幾何学**についての**定理である．射影幾何学が点や直線に関する理論であるのに反して，双対原理は，射影幾何学における証明に関する理論における定理なのである．射影幾何学のなかに身をおいて考える限り，双対原理は何かしら不思議な力をもつ神秘的な原理でしかない．双対原理の本質を知るためには，是非とも，射影幾何学より一段高い立場に身をおいて，射影幾何学を見渡してみる必要がある．

数学的証明を研究の対象とする理論を**証明論**（Beweistheorie, proof theory）とよぶ．たとえば，双対原理は証明論における定理である．

証明論のように，数学的理論を一段高い立場から考察する場合には，研究の対象となっている理論を単に**数学**（mathematics）とよび，数学を研究の対象とする理論のことを**超数学**（metamathematics）とよんで，これらを区別する．研究の対象が**論理**（logic）である場合には，それを研究する理論を**超論理**（metalogic）というのである．

〈超数学〉とか〈超論理〉といっても，そこに特別な考え方があるわけではない．これもまた普通の数学的理論にすぎない．ただ，そこでは，数学における〈命題〉や〈証明〉などが研究の対象として現われ，それらに関する〈超数学的命題〉や〈超数学的証明〉などとの混同を避けるために，このような名称を用いるのである．

数学と超数学との区別は，超数学の研究に際しては重要であるけれども，それは便宜上の問題で，そこに絶対的な差異があるわけではない．たとえば，代数方程式の解法に関する〈Galois の理論〉や，初等幾何学での〈作図不能の証明〉などは，〈解法〉や〈作図〉に関するある種の超数学であるが，それらは，普通には，〈数学〉における理論ということになっている．数学と超数学とを対比させることが必要になるときにのみ，〈超数学〉という名称を必要とするのである．

数理論理学の解説は，その性質上，すべて超数学的あるいは超論理的な立場においてなされる．その上で，その研究対象となっている命題の真偽や推論の内容を〈よりどころ〉として研究するのが semantics で，

研究の対象となっている命題や推論の形式的な構造にのみ着目するのがsyntax なのである．ただし，syntax において命題の真偽や推論の内容を考えない，といっても，それは〈数学〉における命題や推論についてのみであって，〈超数学〉における命題や推論の真偽や内容についていっているのではない．

〈超数学的定理〉は，しばしば**超定理**（metatheorem）とよばれるが，それは**正しい**命題でなければならず，超定理の証明たる〈超数学的証明〉は**内容のよくわかる**証明でなければならない．