

序

竹内外史著‘数学基礎論’の出版から 30 年，その増補版の出版から 14 年が過ぎた．その間に数学基礎論は加速度的発展をとげ，30 年前の中心的教養も現在では基礎論の一分野の入門程度になってしまった．しかし上記の著書で扱われている内容を持つ日本語の本があまりないので蘇生させて欲しいという声も聞かれ，共立出版にその旨お願いして，改訂，加筆をして新しく出していたくことになった．旧本の部分が‘証明論’の一部分であるので，不足の分を補って‘証明論入門’と題するのが適当と思われる．もっとも証明論も拡大，発展しているので，正確には‘還元法による証明論’への入門である．

竹内先生による旧本は一階述語論理（第 1 章）および自然数論（第 2 章）に関する Gentzen の仕事の紹介であった．増補版では八杉が自然数論に関する Gödel の考察を加えた（第 3 章）．現本では八杉が二階論理への簡単な導入（第 4 章）を加えた．二階論理の証明論は入門の範囲を越える事柄が多いので，概略の説明にとどめたが，相対化の理論はある程度詳しく述べてある．これは二階論理に慣れる手段として適当であることと，一度読んでおけばそのことは心配しないで先へ進むことができるからである．第 4 章の §9 に，還元法による証明論について若干の考察を記した．証明論においては‘立場’とか‘方法論’が非常に大事である．それについては専門家の間で基本的にはある種の合意はあるが，研究を進める上でのより精密な見解は各人それぞれの持ち味がある．竹内先生は‘有限の立場’をとられ，序論で詳しく説明されている．私も自分の経験から得た指針をまとめてみた．このようなことは学問の進歩と共に変化するものであるから常に未完成である．したがってこの解説が読者の将来への踏み台になれば幸いである．

第 5 章は，竹内先生による‘その後のトピック’の紹介と（前には付録であった）‘哲学と数学基礎論’についての所見から成っている．

文献は最後にまとめてあり，最小限にして，本文に直接関係のある原典に限った．参考に，というよりは原典への表敬のつもりである．

増補版のときも今回も，編集部の中平靖夫氏にお世話になった。また増補版第二刷のときに，第3章の改訂について日向茂氏から多くの助言をいただいた。お二方に感謝したい。

1987年9月

秋晴れの比叡山の下で

八杉満利子

増補版の序

本書が発行されてから 20 年近くの年月が過ぎた。その間に本書に入れるべき基本的なこととして、Gödel interpretation が現われたので、この機会にこのことを研究された八杉満利子氏に第 3 章として付け加えていただいた。ついでに付録として“哲学と数学基礎論”を付け加えた。これは科学基礎論研究第 39 号第 10 巻 No. 4 に“数学について”という題目で発表されたものであるが、表題が内容にふさわしくないのでこの様に変更したものである。

1973 年 12 月

竹 内 外 史

まえがき

数学基礎論は数学者の間でも、あまりよく理解されない、またあまりよく興味をもたれない分野の一つである。

どうして、数学に用いられる証明自体の構成を研究するこの分野が数学者の関心をよび起さないのでしょうか？

どうして、数学によって代表される複雑な人類の論理の研究が理解に価するものと思われないのでしょうか？

それは、一つにはよい啓蒙、または啓蒙書が少ないためであろう。

しかし、また一つには数学基礎論の方法があまりにも異質的であるため、とりつきにくく、その大体の模様、問題の焦点、興味の中心等を理解するに多大の煩わしさを経なければならぬことにもよるのであろう。

このためか、定義、証明等の厳格さを抜きにした解説はかえって誤解を招きがちに思われる。

例えば、数学における証明の構造を研究するという積極的な学問の意図が、妙にいじけて曲解された数学の基礎づけという消極的な考えにすりかえられて考えられたりする。

また、無矛盾性という数学の問題のもつ面白さ（Riemann の予想の問題のもつ面白さと同じ意味の面白さ）が、無矛盾という言葉のもつ哲学的な理念に覆い尽くされたりする。

なるほど、数学基礎論は集合論の矛盾にその端を発した。その意味で無矛盾性の問題は数学基礎論としてたいせつな問題である。しかし、さらに数学の全局的な研究という意味で数学基礎論はまさに‘数学の基礎づけ’なのである。

無矛盾性の問題はこのような考えかたの試金石、難点の中心としてまさにその面白さが現われてくるのである。

以上のことは、例えば、Gentzen の基本定理によってまざまざと実証される。この定理は決して無矛盾性についての定理ではなく、論理について、これ

まで何人も夢想もし得なかった、実にみごとな美しい定理である。この定理は多くの無矛盾性の問題をその副産物として解決するが、それはこの定理が論理の本体をいかに深く明確に示してくるかを物語る以外の何物でもない。

ある理論の無矛盾性の証明は単に技術的に解決されることはないであろう。現在までの経験が教えるように、それは常にその理論の本質を明示してくるものでなければならないであろう。

その意味でも、解析学、集合論の無矛盾性の問題は現代数学の中心をなす、‘集合論理’の研究と深くつながるものである。

ともあれ、これ等のことがらの理解、‘数学基礎論’の理解は長いトンネルを経てはじめて達成される。

小文においては、このトンネルの部分を述べた。拙い文章がトンネルのうっとうしさを倍加しはしないかと恐れるけれども、この分野の面白さを一人でも多くの人が理解する助けになれば幸いである。

1956年 9 月

竹 内 外 史